Übung 1 *Kondition der Standardoperationen*
Berechnen Sie die relativen Konditionszahlen (Verstärkungsfaktoren) der Standardoperationen *Multiplizieren, Dividieren* und *Wurzel ziehen*, also der Abbildungen:

$$F(x,y) = x \cdot y, \qquad F(x,y) = \frac{x}{y} \qquad F(x) = \sqrt{x}.$$

Sind diese Abbildungen gut konditioniert?

(1+1+1 Punkte)

Übung 2 *Landau Symbole*
Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $f(h) = \mathcal{O}(h^m)$ (für $h \to 0, h > 0$) mit einem möglichst großen $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(h) &= (ph^2+h)^2 - p^2h^4, \qquad p \in \mathbb{N} \\ f(h) &= -\frac{h^2}{\ln(h)} \\ f(h) &= \frac{\sin(x+h) - 2\sin(x) + \sin(x-h)}{h^2} + \sin(x). \end{aligned}$$

Skizzieren Sie für die ersten beiden Funktionen $f(h)$ zusammen mit dem jeweiligen $c \cdot h^m$ auf dem Intervall $(0, 0.5]$. (Hinweis: Für einen der Ausdrücke ist die Form $f(h) = o(h^m)$ vorzuziehen!)

(1.5+1.5+2 Punkte)

Übung 3 *Kondition quadratischer Gleichungen*
Das analytische Lösen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2px + 1 = 0$$

(z.B. mittels quadratischer Ergänzung) führt auf zwei Lösungen $x_1(p)$ und $x_2(p)$, die natürlich vom Parameter p abhängen. Berechnen Sie die relativen Konditionszahlen (Verstärkungsfaktoren) der Funktion

$$F(p) := \begin{pmatrix} x_1(p) \\ x_2(p) \end{pmatrix},$$

welche eine Lösungsvorschrift der quadratischen Gleichung darstellt. Für welche Werte von p ist die Lösung überhaupt in der Menge der reellen Zahlen definiert?

Betrachten Sie nun das alternativ parametrisierte Problem:

$$x^2 - \frac{t^2+1}{t}x + 1 = 0 \qquad\qquad t \in [1, \infty).$$

Berechnen Sie auch für diesen Fall die relativen Konditionszahlen der zugehörigen Lösungsvorschrift $\tilde{F}(t)$ und vergleichen Sie die relativen Konditionszahlen mit denen der ursprünglichen Formulierung. Für welche Werte von p bzw. t wird das jeweilige Problem schlecht konditioniert?

(5 Punkte)

Übung 4 *Fliesskommazahlen und die Zeltabbildung (Praktische Übung)*
Betrachten Sie die Zeltabbildung, die das Einheitsintervall $I := [0,1]$ auf sich selbst abbildet

$$f : I \mapsto I, \quad f(x) := \begin{cases} 2x & \text{falls } x \in [0, 0.5) \\ 2 - 2x & \text{falls } x \in [0.5, 1] \end{cases}. \tag{1}$$

Dies ist eines der einfachsten Beispiele für eine nichtlineare Abbildung zur Beschreibung eines dynamischen Systems. Für ein $x_0 \in [0,1]$ definieren wir die Folge (x_i) über

$$x_i = f(x_{i-1}), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Die Zeltabbildung ist ein chaotisches System, d.h. kleine Änderungen am Ausgangswert x_0 können große Auswirkungen auf die späteren Werte haben und es lässt sich scheinbar nicht vorhersagen welche Werte die Folge annehmen wird. Dummerweise gilt das nicht solange sich x_0 als endliche Binärzahl darstellen lässt. Es ist somit nicht direkt möglich dieses Verhalten am Computer zu reproduzieren.

In dieser Übung sollen Sie untersuchen wie sich die Zeltabbildung für endliche Binärzahlen verhält und wie Sie das gewünschte chaotische Verhalten implementieren können.

a) Schreiben Sie ein C++ Programm, das für den Startwert $x_0 = 0.01401$ die Folgenglieder (x_i) für $i = 1 \ldots 100$ berechnet und der Reihe nach auf dem Terminal ausgibt. Das sollte etwa folgendermaßen aussehen:

```
$ g++ -o tent_map tent_map.cc
$ ./tent_map
0.01401
0.02802
...
```

Schreiben sie die Werte in eine Datei `daten.dat` indem sie die Terminal Ausgabe umlenken:

```
$ ./tent_map > daten.dat
```

Visualisieren Sie die Daten mithilfe von `gnuplot`[†]. Starten Sie dafür `gnuplot` im selben Verzeichnis in dem auch die Datei `daten.dat` liegt im Terminal mit dem Befehl `gnuplot`. In der darauf erscheinenden Eingabezeile können Sie die Daten über den Befehl

```
plot 'daten.dat'
```

visualisieren.

b) Die Ergebnisse sehen anfangs chaotisch aus aber es bildet sich doch recht schnell ein Muster. Um die Sache nicht unnötig kompliziert zu machen betrachten wir im Folgenden *Festkommazahlen*, es lässt sich aber alles in ähnlicher Form für Fließkommazahlen zeigen. Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Sei $x_0 = (0.m_1 \ldots m_r)_2 \in [0,1]$ eine Festkommazahl in der Binärdarstellung mit höchstens r Nachkommastellen ungleich 0. Sei die Folge (x_i) über (2) definiert. Dann gilt $x_{r+1} = 0$.

Anmerkung: Natürlich kann $x_k = 0$ schon für $k < r + 1$ erfüllt sein. Ob Sie hier mit Fliesskommaarithmetik oder exakt rechnen macht keinen Unterschied.

c) Durch den Beweis von Aufgabenteil b) wird schnell klar, dass für irrationale Startwerte $x_0 \in [0,1]$ die Folge (x_i) nie periodisch wird. Das soll hier nicht gezeigt werden. Stattdessen sollen Sie sich noch einmal mit der Implementierung auseinandersetzen. Um auch für endliche Binärzahlen, wie sie der Computer verwendet, unperiodische Folgen zu erzeugen kann man die Funktion folgendermaßen abändern:

$$\tilde{f} : I \mapsto I, \tilde{f}(x) := \begin{cases} 1.999999x & \text{falls } x \in [0, 0.5) \\ 1.999999 \cdot (1 - x) & \text{falls } x \in [0.5, 1] \end{cases} \tag{3}$$

[†]http://gnuplot.sourceforge.net/, für die Installation auf Ihrem Betriebssystem befragen Sie das Internet. In Aufgabenteil c) bekommen Sie dafür einen Punkt ;).

Verwenden Sie $\tilde{f}$ in ihrem Programmcode aus Aufgabenteil (a) und visualisieren Sie ihr Ergebnis erneut mit `gnuplot`.

(3+3+1 Punkte)