

Übung 1 Normen im \mathbb{R}^n

a) Zeichnen Sie die Einheitskugel

$$S := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p = 1\}$$

für $p = 1, 2, \infty$.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass alle Normen im \mathbb{R}^n äquivalent sind. Berechnen Sie scharfe Grenzen zur gegenseitigen Abschätzung der Normen $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ und $\|x\|_\infty$. Wie verhalten sich die Grenzen für $n \rightarrow \infty$?

(1+2 Punkte)

Übung 2 Normen im unendlich-dimensionalen Vektorraum

Betrachten wir den Raum $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ der auf dem Intervall $[0, 1]$ stetigen Funktionen. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|, \quad f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$$

ist eine Norm auf $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

b) Die Abbildung

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx, \quad f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$$

ist eine Norm auf $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

c) Betrachten Sie für $x_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ die Funktionenfolge

$$u_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus [x_k, x_{k+1}] \\ \sin\left(\frac{x_k - x}{x_k - x_{k+1}} \cdot \pi\right) & \text{für } x \in [x_k, x_{k+1}] \end{cases} \quad (1)$$

und berechnen Sie $\|u_k\|_1$ und $\|u_k\|_\infty$ für $k \rightarrow \infty$.

Warum können diese beiden Normen nicht äquivalent sein?

(5 Punkte)

Übung 3 Frobeniusnorm

Die Frobenius-Norm einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist definiert als

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zeigen Sie:

(i) Die Frobenius-Norm (FN) definiert eine Norm auf $\mathbb{K}^{n \times n}$.

(ii) FN ist verträglich mit der euklidischen Vektornorm $\|\cdot\|_2$.

(iii) FN Frobenius-Norm ist submultiplikativ.

(5 Punkte)

Übung 4 Strömung in Rohrleitungsnetzwerken (Praktische Übung)

Auf dem letzten Übungsblatt sollten Sie das lineare Gleichungssystem für ein Rohrleitungsnetzwerk aufstellen. In dieser Aufgabe widmen wir uns der Implementierung.

- Schreiben Sie ein Programm, das das Gleichungssystem für beliebiges $N \geq 3$ aufstellt und auf den Bildschirm ausgibt.
- Welche Normen sind in der Klasse `DenseMatrix` schon definiert? Implementieren Sie eine Methode, die auch die Frobenius-Norm berechnet. Berechnen Sie alle Normen für das lineare Gleichungssystem aus a) für $N = 10$.
- Die Potenzmethode ist ein iteratives numerisches Verfahren zur Berechnung des betragsgrößten Eigenwertes und des dazugehörigen Eigenvektors einer Matrix.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und ein Startvektor $r_0 \in \mathbb{R}^n$, $Ar_0 \neq 0$ gegeben. In jedem Iterationsschritt berechnet man

$$r_{k+1} = \frac{Ar_k}{\|Ar_k\|},$$

d.h. die aktuelle Näherung r_k wird auf die Matrix A angewandt und dann normiert. Die Vektoren r_k konvergieren gegen einen Eigenvektor zum betragsgrößten Eigenwert, sofern dieser Eigenwert dem Betrage nach einfach ist und seine algebraische Vielfachheit gleich seiner geometrischen Vielfachheit ist. Der Rayleigh-Quotient

$$\lambda_k = \frac{(r_k, Ar_k)_2}{(r_k, r_k)_2}$$

liefert im Grenzwert den entsprechenden Eigenwert, wobei $(\cdot, \cdot)_2$ für das euklidische Skalarprodukt steht.

Implementieren Sie dieses Verfahren, welches den größten Eigenwert und dazu entsprechenden Eigenvektor berechnet. Wenden Sie es auf das Gleichungssystem aus a) für $N = 10$.

Wichtige Hinweise:

- Für die Bearbeitung dieser Aufgabe benötigen sie die HDNum Bibliothek, die Sie auf der Vorlesungshomepage finden können.
- Sie haben für die Bearbeitung dieser Aufgabe **2 Wochen** Zeit.
- Verwenden Sie das auf der Vorlesungshomepage zur Verfügung gestellte Programmgerüst!
- Teilaufgaben b) und c) können unabhängig von Teilaufgabe a) gelöst werden.
- Kompilieren:

```
g++ -std=c++11 -I../hdnum/ -o rohrleitungsnetzwerk rohrleitungsnetzwerk.cc
```

Der Pfad zur Headereinbindung nach der `-I` Option bezieht sich auf den Fall, falls die Datei `rohrleitungsnetzwerk.cc` sich in einem Verzeichnis (bspw. Blatt 4) parallel zu `hdnum/` befindet. Bei einem anderen Ablageort der Datei müssen Sie diesen Pfad entsprechend anpassen. Die Option `-std=c++11` lässt Ihren Compiler im C++-11 Modus laufen. Dies ist optional und wird in dieser Vorlesung nicht zwingend benötigt.

- In dem Ordner `hdnum/doc/html` finden Sie eine durch doxygen generierte Dokumentation der HDNum Bibliothek.
- Bitte den C++ *Style Guide* beachten!

(10 Punkte)