
Übung 1 *Einfache Eigenschaften*

a) Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $P^2 = P$. Außerdem sei P nicht die Null-Matrix. Zeigen Sie, dass $\|P\| \geq 1$ für jede natürliche Matrixnorm $\|\cdot\|$ gilt.

b) Zeigen Sie:
$$A = \overline{A}^T \quad \Leftrightarrow \quad (Ax, y)_2 = (x, Ay)_2 \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$$

c) Sei A eine symmetrisch positiv definite Matrix. Aufgrund der Symmetrie lässt sich A orthogonal diagonalisieren, d.h. es existiert eine orthogonale Matrix Q und eine Diagonalmatrix D mit $A = QDQ^T$. Auf der Diagonalen der Matrix D stehen gerade die Eigenwerte von A.

   Zeigen Sie, dass eine Matrix B existiert mit $A = B \cdot B$. (Man kann also die Quadratwurzel von A definieren.)

(3 Punkte)

Übung 2 *Positiv definite Matrizen*
Sehr häufig wird im Zusammenhang mit positiv-definiten Matrizen die Symmetrie vorausgesetzt. Doch positiv-definite Matrizen müssen nicht zwangsläufig symmetrisch sein!

a) Zeigen Sie, dass $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau dann positiv definit in $\mathbb{R}$ ist, wenn der symmetrische Anteil
$$A_S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$$
   positiv definit ist.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ und $A_X = (a_{ij})_{i,j \in X} \in \mathbb{R}^{|X| \times |X|}$ eine sogenannte *Hauptuntermatrix*. Zeigen Sie, dass A_X ist positiv definit, wenn A positiv definit ist.

c) Gegeben ist $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -(1+\alpha) & 2 \end{pmatrix}.$$
   Für welche Werte von α ist A positiv definit?

d) Zeigen Sie: Sei $H \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $A = \bar{H}^T H$. Dann gilt A ist positiv definit in $\mathbb{C}$ genau dann wenn $\text{Rang}(H) = n$.

(4 Punkte)

Übung 3 *Hermitesche Matrix in* $\mathbb{C}$
In dieser Übung sollen Sie folgende Aussage aus der Vorlesung beweisen:

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt: A ist hermitesch genau dann wenn $(Ax, x)_2 \in \mathbb{R} \, \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Gehen Sie dafür wie folgt vor:

a) Zeigen Sie die Hinrichtung: A hermitesch $\Rightarrow (Ax, x)_2 \in \mathbb{R} \, \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

b) Zeigen Sie: $(Ax, x)_2 \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \mathrm{Im}(Ax, y)_2 = -\mathrm{Im}(Ay, x)_2 \forall x, y \in \mathbb{C}^n$. Hinweis: Betrachten Sie $(A(x+y), x+y)_2$.

c) Zeigen Sie: $(Ax, x)_2 \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \mathrm{Re}(Ax, y)_2 = \mathrm{Re}(Ay, x)_2 \forall x, y \in \mathbb{C}^n$. Hinweis: Betrachten Sie $(A(\mathrm{i}x + y), \mathrm{i}x + y)_2$.

d) Zeigen Sie die Rückrichtung mithilfe von b) und c), also $(Ax, x)_2 \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \Rightarrow A$ ist hermitesch.

(5 Punkte)

Übung 4 *Rayleigh-Quotienten*

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine positive definite Matrix. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei A ferner symmetrisch. Der Rayleigh-Quotient eines Vektors $x \in \mathbb{K}^n$ ist definiert als

$$R_A(x) = \frac{(Ax, x)_2}{(x, x)_2} .$$

a) Zeigen Sie folgende Beziehungen zwischen den Rayleigh-Quotienten und dem größten bzw. kleinsten Eigenwert von A:

$$\sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} R_A(x) = \lambda_{\max}(A) = \max\{\lambda \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von A}\}$$

$$\inf_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} R_A(x) = \lambda_{\min}(A) = \min\{\lambda \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von A}\} .$$

b) Die Kondition einer Matrix A in der euklidschen Norm ist definiert als

$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 .$$

Zeigen Sie dass sich die Kondition der Matrix in folgender Weise durch den größten und kleinsten Eigenwert von A beschreiben lässt:

$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$$

(5 Punkte)