Übung 1 *Störungsanalyse*
Man betrachte das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der relative Fehler in den Matrixelementen betrage höchstens $\pm 1\%$, derjenige der Komponenten der rechten Seite höchstens $\pm 3\%$.

a) Schätzen Sie die relativen Fehler $||\delta x||_1/||x||_1$ und $||\delta x||_\infty/||x||_\infty|$ ab.

b) Zeichnen Sie jeweils die Punktemenge in $\mathbb{R}^2$, in der die Lösung $x + \delta x$ des gestörten Systems liegt.

(5 Punkte)

Übung 2 *Eine spezielle Tridiagonalmatrix*
Gegeben sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ von folgender Form:

$$T = \begin{pmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{pmatrix}.$$

mit $bc > 0$.

(a) Zeigen Sie: T besitzt für $k = 1, ..., n$ die Eigenwerte

$$\lambda_k = a + 2\, b\, \nu \cos(\frac{k\pi}{n+1})$$

mit den Eigenvektoren

$$v_k = \left(\nu \sin(\frac{k\pi}{n+1}), \nu^2 \sin(2\frac{k\pi}{n+1}), \cdots, \nu^n \sin(n\frac{k\pi}{n+1})\right)^T.$$

wobei $\nu = \sqrt{\frac{c}{b}}$ ist.

Nützliche Hilfe: Für $l, x \in \mathbb{R}$ gilt die nützliche Formel:

$$2\cos(x)\sin(lx) = \sin((l+1)x) + \sin((l-1)x)$$

(b) Berechnen Sie für $a = 2$ und $b = c = -1$ die Kondition $\mathrm{cond}_2(T)$. Geben Sie ihr Verhalten für $n \longrightarrow \infty$ in Landaunotation an.

(5 Punkte)

Übung 3 *Zur Gauß Elimination*

a) Nach k Schritten der Gauß-Elimination hat die Matrix $A^{(k)}$ folgende Blockgestalt:

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} R_{11}^{(k)} & R_{12}^{(k)} \\ 0 & B^{(k)} \end{bmatrix} \tag{1}$$

wobei $R_{11}^{(k)} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $R_{12}^{(k)} \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$ und $B^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$.

Zeigen Sie: Für die Blockzerlegung

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} \alpha^{(k)} & (w^{(k)})^T \\ \sigma^{(k)} & C^{(k)} \end{bmatrix} \tag{2}$$

mit $C^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n-k-1)\times(n-k-1)}$ und $\sigma^{(k)}, w^{(k)} \in \mathbb{R}^{n-k-1}$, $\alpha^{(k)} \neq 0$ gilt die Rekursionsformel

$$B^{(k+1)} = C^{(k)} - \frac{1}{\alpha^{(k)}} \sigma^{(k)} (w^{(k)})^T. \tag{3}$$

b) Begründen Sie, dass auch folgender Algorithmus die LR Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durchführt. Es wird angenommen, dass keine Zeilenvertauschungen notwendig sind. Außerdem wird das Ergebnis der LR-Zerlegung wieder direkt in der Matrix A gespeichert. Dabei gehören die Einträge unterhalb der Diagonalen zu L und die restlichen zu R. Ein formaler Beweis ist nicht verlangt.

```
for (i = 2...n) do
  for (j = 2...i) do
    a_{i,j-1} = a_{i,j-1} / a_{j-1,j-1}
    for (k = 1..j-1) do
      a_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k} a_{k,j}
    end for
  end for
  for (j = i+1...n) do
    for (k = 1..i-1) do
      a_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k} a_{k,j}
    end for
  end for
end for
```

(5 Punkte)