Übung 1 *LR-Zerlegung konkret*

Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 10 & \frac{15}{2} \\ -2 & 6 & 3 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & -\frac{11}{2} \\ -2 & 10 & -12 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 52 \\ 59 \\ -11 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie mit angegebenem Rechenweg die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung. Bestimmen Sie außerdem die Determinante von A und lösen Sie $Ax = b$.
- Berechnen Sie die Konditionszahl $\mathrm{cond}_\infty(A)$.

(5 Punkte)

Übung 2 *Eigenschaften der LR-Zerlegung*

a) Zeigen Sie, dass die Menge der unteren Dreiecksmatrizen mit lauter Einsen auf der Hauptdiagonalen bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet. Ist diese Gruppe abelsch?

   Wenn eine LR-Zerlegung $A = LR$ (ohne Permutation) existiert, lässt sich damit die Eindeutigkeit dieser Zerlegung zeigen. Dafür bekommen Sie einen Bonuspunkt.

b) Gegeben sei eine LR-Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = LR$, ohne Zeilenvertauschungen. Es gelte $|l_{ij}| \leq 1$. Bezeichne a_i und r_i die i-te Zeile von A bzw. R. Zeigen Sie, dass

$$r_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_j^T$$

   gilt und verwenden Sie diese Beziehung, um

$$\|R\|_\infty \leq 2^{n-1} \|A\|_\infty$$

   zu beweisen (Norm der Gleichung bilden - dann Induktion).

(5 Punkte)

Übung 3 *Rückwärtsanalyse des Lösens eines Dreiecksystems*
Es seien x und y Lösungen des unteren bzw. oberen Dreieckssystems $Lx = b$ und $Ry = c$ mit $L, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Weiterhin seien $\hat{x}$ bzw. $\hat{y}$ die numerischen Lösungen des unteren bzw. oberen Dreieckssystems $(L + F)\hat{x} = b$ und $(R + G)\hat{y} = c$ mit den Störungen $F, G \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt

$$|F| \leq n \text{ eps } |L| + O(\text{eps}^2) \tag{1}$$
$$|G| \leq n \text{ eps } |R| + O(\text{eps}^2)\ . \tag{2}$$

Hier ist der Betrag einer Matrix komponentenweise genommen und dementsprechend sind diese Ungleichung zu verstehen.
Beweisen Sie die Gleichungen (1), (2) durch Induktion über die Zeilen.

Tipp: Verwenden Sie mitunter $\frac{1}{1+\epsilon} = 1 - \epsilon + O(\epsilon^2)$. **(5 Punkte)**

Übung 4 *Gauß-Elimination (Praktische Übung)*

Schreiben Sie eine neue Headerdatei `gauss.hh`, die die Template-Funktion

```
template<typename NUMBER>
void gauss( hdnum::DenseMatrix<NUMBER>& A,   // Input  A
            hdnum::Vector<NUMBER>& x,        // Output x
            hdnum::Vector<NUMBER>& b         // Input  b
            )
{
  ...
}
```

zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$) nach dem Eliminationsverfahren von Gauß. Führen Sie Zeilenvertauschung durch um sicherzustellen, dass die Pivotelemente ungleich Null sind.
Diese Headerdatei wird benötigt, damit das Hauptprogramm `gaussmain.cc` (siehe Webseite der Vorlesung) kompiliert werden kann und das dort aufgeführte Gleichungssystem $Ax = b$ nach x gelöst werden kann.
Kompilieren Sie das Programm für die beiden Datentypen `double` und `float` und überprüfen Sie, wie groß jeweils die Dimension n maximal sein darf, damit das Programm für das dort aufgeführte Gleichungssystem noch eine richtige Lösung liefert. **(5 Punkte)**