
Übung 1 *Curve-Fitting*

Gegeben seien die folgenden Wertepaare:

z_i	0	0.15	0.31	0.5	0.6	0.75
y_i	1.0	1.004	1.031	1.117	1.223	1.422

Gesucht ist ein reelles Polynom $P(z)$ ersten oder zweiten Grades, das den Fehler

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} |P(z_i) - y_i|^2$$

minimiert.

Zur Erinnerung: Ein reelles Polynom der Ordnung k hat die Gestalt: $P_k(z) = x_0 + x_1 z + ... + x_k z^k$ mit Koeffizienten $x_0, ..., x_k \in \mathbb{R}$.

a) Formulieren Sie das Problem um, in die Gestalt: Finden Sie ein $x = (x_0, x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ so, dass $\|Ax - b\|_2^2$ minimal ist und geben Sie (für $k = 1$ und $k = 2$) die zugehörige Matrix A sowie den Vektor b an.

b) Stellen Sie die Normalengleichung für $k = 1$ und $k = 2$ auf.

c) Ist die Lösung der Normalengleichung eindeutig?

Sie brauchen die Normalengleichung aus b) hier nicht zu lösen.

(5 Punkte)

Übung 2 *QR-Zerlegung von A*

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$, Rang$(A) = n$. Sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A mit $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

a) $A^T A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist symmetrisch positiv definit.

b) $\text{cond}_2(A^T A) = \text{cond}_2(A)^2$.

c) Welche Nachteile sehen Sie darin, die Normalengleichung $A^T A$ über eine LR-Zerlegung zu lösen?

d) $\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(R) = \text{cond}_2(\tilde{R}) \geq \frac{\max_i |r_{ii}|}{\min_k |r_{kk}|}$.

Bemerkung: Für eine rechteckige Matrix A ist die Kondition allgemein definiert als

$$\text{cond}(A) := \frac{\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min\limits_{\|y\|=1} \|Ay\|}.$$

(5 Punkte)

Übung 3 *QR-Zerlegung von A*

Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

per Hand mit Hilfe des Householder-Verfahrens.

(5 Punkte)

Übung 4 *Curve-Fitting (Praktische Übung)*
Zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

mit $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ und $\text{Rang}(A) = n$ soll die LR-Zerlegung eingesetzt werden. Eine QR-Zerlegung wird in der Praxis zur Lösung solch linearer Ausgleichsprobleme bevorzugt (vgl. mit Aufgabe 2b), aber dies erfordere eine Implementierung, welche wir hier nicht vornehmen wollen. Das vorgegebene Hauptprogramm `curvefitting.cc` sollte (nachdem Sie die Funktion `solveLeastSquares` erfolgreich implementiert haben) das Normalengleichungssystem aus diesem Übungsblatt lösen. Im Hauptprogramm wird die Funktion

```
template<typename NUMBER>
void solveLeastSquares(hdnum::DenseMatrix<NUMBER>& A,
                       hdnum::Vector<NUMBER>& b,
                       hdnum::Vector<NUMBER>& x)
{
  ...
}
```

aufgerufen, welche die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ unseres linearen Ausgleichsproblems liefern soll.

a) Implementieren Sie diese Funktion in der Headerdatei `solveLeastSquares.hh` mit der man die Lösung des linearen Ausgleichsproblems bekommt. Benutzen Sie dafür die LR-Zerlegung aus der `hdnum`.

b) Tragen Sie nun in die Eingabedateien `A6_linear.dat`, `A6_quadratic.dat` und `b6.dat` die entsprechenden Matrizen aus Aufgabe 2a) ein. Dabei bezeichnet jede Zeile der Datei eine Matrixzeile und die einzelnen Spalten werden durch ein Leerzeichen voneinander getrennt. Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem und berechnen Sie den Defekt

$$d = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2.$$

c) Stellen Sie jeweils für das lineare und quadratische Ausgleichrechnungsproblem die gegebenen Wertepaare und berechneten Polynome in einer Grafik dar, z.B. mit Gnuplot.

(5 Punkte)