

**Übung 1** *Newton Interpolation*

- a) Interpolieren Sie die Funktion  $f(t) = \sqrt{t}$  mit Hilfe des Newton'schen Interpolationspolynoms vom Grad 2 ( $p_2 \in P_2$ ) zwischen den Stützstellen  $t_0 = \frac{1}{4}$ ,  $t_1 = 1$ , und  $t_2 = 4$ .
- b) Nehmen sie die Stützstelle  $t_3 = 9$  hinzu und berechnen Sie das Interpolationspolynom  $p_3 \in P_3$ .
- c) Skizzieren Sie die Graphen von  $f$ ,  $p_2$  und  $p_3$  (per Hand oder mit Gnuplot).

( 5 Punkte )

**Übung 2** *Schema von Neville-Aitken*

Seien  $n + 1$  Wertepaare  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$  gegeben. Es bezeichne  $p_{i,k} \in P_k$  das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom vom Grad  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , zu den Wertepaaren  $(x_i, y_i), \dots, (x_{i+k}, y_{i+k})$ .

- a) Zeigen Sie, dass folgende Rekursionsformel gilt:

$$(i) \quad p_{i,0}(x) = y_i \quad \text{für } i = 0, \dots, n,$$

$$(ii) \quad p_{i,k}(x) = \frac{(x - x_i)p_{i+1,k-1}(x) - (x - x_{i+k})p_{i,k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i} \quad \text{für } i = 0, \dots, n - k.$$

- b) Damit lässt sich das Interpolationspolynom  $p_{0,n}(x)$  zu den Wertepaaren  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$  an einem Punkt  $x = \xi$  auswerten, ohne die Koeffizienten des Polynoms explizit zu berechnen.

*Anmerkung: Unter der Annahme, dass  $\xi \neq x_i \forall i$  gilt verwendet man aus Stabilitätsgründen bei der Implementierung die Darstellung*

$$p_{i,k}(\xi) = p_{i,k-1}(\xi) + \frac{p_{i,k-1}(\xi) - p_{i+1,k-1}(\xi)}{\frac{\xi - x_{i+k}}{\xi - x_i} - 1}.$$

Für verschiedene Orte wurde an einem bestimmten Tag die Tageslänge gemessen:

Ort	Tageslänge	Lage
A	17h 28m	55,7°
B	18h 00m	57,7°
C	18h 31m	59,3°
D	19h 56m	62,6°

Bestimmen Sie die Tageslänge am Ort  $E$  bei  $61,7^\circ$  durch Auswertung des zugehörigen Interpolationspolynoms mit Hilfe der obigen Rekursionsformel. Es genügt auf 2 Nachkommastellen genau zu rechnen.

( 5 Punkte )

**Übung 3** *Komplexität der Interpolation*

Sei  $p \in P_n$  das Interpolationspolynom zu den  $n + 1$  paarweise verschiedenen Stützstellen  $t_0, \dots, t_n$  mit den zugehörigen Werten  $y_0, \dots, y_n$ . Bestimmen Sie die Anzahl der benötigten Operationen

- zur Berechnung der Koeffizienten von  $p$
- und zur Auswertung von  $p$  an einer beliebigen Stelle  $t = \xi$

- bezüglich der Lagrange-Basis,
- bezüglich der Newton-Basis und
- bezüglich der Monom-Basis.

Bestimmen Sie zum Vergleich auch die Anzahl der benötigten Operationen zur Auswertung von  $p(t)$  an einer beliebigen Stelle  $t = \xi$  mit Hilfe des Neville-Aitken-Schemas.

*Hinweis: Die sehr naive Auswertung des Polynoms  $p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$  (in der Monom-Basis) erfordert  $O(n^2)$  Multiplikationen und  $n$  Additionen. Dagegen wird beim **Hornerschema***

$$p(t) = a_0 + (t \cdot (a_1 + t \cdot (\dots (a_{n-1} + t \cdot a_n) \dots)))$$

*von innen nach außen ausgewertet. Wie viele Additionen und Multiplikationen sind dafür notwendig?*

( 5 Punkte )

#### Übung 4 Dividierte Differenzen

Beweisen Sie, dass die dividierten Differenzen invariant unter Permutation der Stützstellen sind: Gegeben seien  $n$  paarweise verschiedene Stützstellen  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$  und eine Permutation derselben  $\{\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}\}$ . Zeigen Sie

$$f[x_0, \dots, x_{n-1}] = f[\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}].$$

( Bonus 5 Punkte )

#### Übung 5 Polynominterpolation (Praktische Übung)

Alle in dieser Aufgabe zu programmierende Funktionen sollen einen `template` Parameter akzeptieren, der es erlaubt den Typ zur näherungsweise Repräsentation der reellen Zahlen zu setzen.

- Schreiben Sie eine Funktion, welche für gegebene Stützstellen  $(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}$  und Werte  $(y_i)_{i=1}^n$  einer eindimensionalen Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  das zugehörige Interpolationspolynom an der Stelle  $x$  auswertet.
- Schreiben Sie ein Programm, dass die Funktionen  $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$  und  $f_2(x) = \sqrt{|x|}$  im Intervall  $I = [-1, 1]$  mit äquidistanten Stützstellen  $x_i = -1 + ih$ ,  $i = 0, \dots, n$ , mit  $h = 2/n$ , für  $n = 5, 10, 20$  durch ein Polynom  $p_n$  vom Grad  $n$  interpoliert.

Werten Sie die Interpolationspolynome auf einem dichten Gitter (1000 Gitterpunkte) aus, stellen Sie die Ergebnisse graphisch dar und vergleichen Sie sie mit den richtigen Funktionsverläufen.

- Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.

( Bonus 5 Punkte )