Hinweis:
Die Klausuranmeldung ist bis zum **Dienstag, den 24.07.2018** 24:00 Uhr, freigeschaltet.
Bitte melden Sie sich zur Teilnahme **fristgerecht** im Müsli an.

Übung 1 *Bézier-Kurve zur Approximation des Sinus*
Berechnen Sie die Bézier-Punkte $P_0, \ldots, P_3$, deren zugehörige Bézier-Kurve $B(t)$ vom Grad 3, die den Graphen

$$S(t) = \begin{pmatrix} \pi t \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $t = [0, 1]$ approximiert. Dabei sollen die Bedingungen

$$\begin{aligned} S(0) &= B(0) \qquad & S(1) &= B(1) \\ S'(0) &= \alpha B'(0) \qquad & S'(1) &= \alpha B'(1) \end{aligned}$$

erfüllt sein. Hierbei sei α so gewählt, dass zusätzlich

$$B(0.5) = S(0.5)$$

gilt.

(5 Punkte)

Übung 2 *Eigenschaften der kubischen Spline Interpolation*
Auf dem Intervall $I = [0, 2]$ seien die Knoten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ gegeben, $X = \{x_0, x_1, x_2\}$. Sei $S(X)$ der Vektorraum der kubischen Splines mit **natürlichen** Randbedingungen.

a) Welche der folgenden Funktionen liegen im $S(X)$? Begründen Sie ihre Antwort.

$$\begin{aligned} f_1(x) =& x^2(x-6) - (x-2)^2 \,, \\ f_2(x) =& \max\{0, x-1\}^3 - \frac{1}{2}x^3 \,, \\ f_3(x) =& x^3 - x^2 \,. \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie den interpolierenden Spline $s \in S(X)$ von $f(x) = x^3$.

(5 Punkte)

Übung 3 *Numerische Differentiation*

a) Sei $f \in C^2([a, b])$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$. Bei der numerischen Auswertung von $f'(x)$ wählt man eine möglichst kleine Schrittweite h und berechnet den *Vorwärtsdifferenzenquotienten*

$$d_h = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Der Differenzenquotient d_h werde exakt berechnet und nicht mit Gleitkommazahlen. Zeigen Sie, dass für den dabei gemachten *Diskretisierungsfehler* gilt:

$$|d_h(x) - f'(x)| \leq c \cdot h, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

b) Doch die Schrittweite h darf man nicht zu klein wählen, denn bei der numerischen Differenziation spielt die Auslöschung eine wesentliche Rolle. Sei $f(x)$ der echte Wert von f an der Stelle x und $\tilde{f}(x)$ seine Darstellung auf einem Computer, der mit der Maschinengenauigkeit eps arbeitet. Es gelte also $|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq eps$.

Zeigen Sie, dass man die Schrittweite h in der Größenordnung von $\sqrt{eps}$ wählen sollte, um den *Gesamtfehler*

$$|\tilde{d}_h(x) - f'(x)|$$

zu minimieren.

Hinweis: Untersuchen Sie zuerst $|\tilde{d}_h(x) - d_h(x)|$. Bei der Abschätzung von $|\tilde{d}_h(x) - f'(x)|$ benutzen Sie das Ergebnis a)

(5 Punkte)

Übung 4 *Numerische Differentiation (Praktische Übung)*

a) Schreiben Sie eine Funktion, welche die zweite Ableitung von $\sinh(x)$ für $x = 0.6$ mit dem zweiten Differenzenquotient für ein gegebenes h approximiert

$$a(h) := \frac{\sinh(x+h) - 2\sinh(x) + \sinh(x-h)}{h^2} \approx \frac{d^2}{dx^2}\sinh(x)$$

Berechnen Sie die Werte $a(h_i)$ für $h_i = 2^{-i}$, $i = 1, \ldots, 20$ und vergleichen Sie mit dem exakten Wert der zweiten Ableitung.
Erinnerung: $\frac{d^2}{dx^2}\sinh(x) = \sinh(x)$.

b) Bis etwa $i = 12$ wird der Fehler kleiner. Mit welcher Ordnung nimmt der Fehler ab? Ermitteln Sie anhand Ihrer Ausgabe das j, sodass sich der Fehler wie $\mathcal{O}(h^j)$ verhält.

Warum werden die Werte für kleiner werdendes h irgendwann schlechter?

c) Untersuchen Sie inwieweit man Extrapolation zum Limes verwenden kann um die numerischen Werte zu verbessern. Schreiben Sie eine Funktion, welche die Stützpunkte $\tilde{h}_j$, $j \in \{0, \ldots, k\}$ erhält und $a(0)$ durch Extrapolation zum Limes approximiert.

Berechnen Sie für $h_i = 2^{-i}$, $i = 1, \ldots, 10$ die Approximation mit zwei Stützstellen $(h_i, h_i/2)$ bzw. drei Stützstellen $(h_i, h_i/2, h_i/4)$. Wie verhält sich der Fehler?

d) Die Bearbeitung dieses Aufgabenteils ist 2 Bonuspunkte wert. Nutzen Sie bei ihrer Extrapolation zum Limes aus, dass sich $a(h)$ als Reihe in h^2 schreiben lässt. Verwenden Sie dafür die Stützpaare $(h_i^2, a(h_i))$ anstelle von $(h_i, a(h_i))$.

Wie wirkt sich diese Änderung auf die Konvergenz des Fehlers aus (wiederum zwei und drei Stützstellen)?

Anmerkung: Man nennt diese Modifikation Richardson Extrapolation.

(5 (+ 2 Bonus) Punkte)