
Hinweis:
Die Klausuranmeldung ist bis zum **Dienstag, den 24.07.2018** 24:00 Uhr, freigeschaltet.
Bitte melden Sie sich zur Teilnahme **fristgerecht** im Müsli an.

Übung 1 *Trigonometrische Interpolation*
Bestimmen Sie die Koeffizienten $c_0, \dots, c_3$ der komplexen trigonometrischen Interpolation der Funktion $f(x) = \min(\frac{1}{\pi}\,x, 2 - \frac{1}{\pi}\,x)$ zu den vier Stützstellen $x_j = \frac{2\pi j}{4}$, $j = \{0 \dots, 3\}$. Wieviele dieser Koeffizienten müssen Sie tatsächlich berechnen, um das Interpolationspolynom aufzustellen?
Hinweis: f ist reellwertig. **(5 Punkte)**

Übung 2 *Gauß Approximation*
Auf dem Intervall $[-1, 1]$ betrachten wir die Polynome $p_0(x) = 1$ und $p_1(x) = -x + 1$. Diese bilden den Raum $S := \text{span}\{p_0, p_1\} = \{g \mid g = \alpha p_0 + \beta p_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ mit dem Skalarprodukt und mit der Norm

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Bestimmen Sie die Funktion $g \in S$ zu $f : [-1, 1] \ni x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$, so dass

$$\|f - g\| \to \min .$$

(5 Punkte)

Übung 3 *Approximation durch Haar-Wavelets konkret*
Berechnen Sie die Koeffizienten zur Approximation von

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 1.5\frac{|x-0.5|}{0.25} + 0.5\frac{|x-0.5|^3}{0.25}, & |x - 0.5| \leq 0.25 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ in der Haar-Waveletbasis der Stufe 3. **(5 Punkte)**

Übung 4 *Kubische Splines (Praktische Übung)*

1. Schreiben Sie eine C++Funktion `getCubicSpline(...)`, die ausgehend von Stützstellen

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$$

und zugehörigen Stützwerten $y_0, y_1, \dots, y_n$ die Koeffizienten $a_k^{(i)}, k = 0, \cdots, 3,\ i = 1, \cdots, n$ des natürlichen kubischen Interpolationssplines $s(x)$,

$$s(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(x - x_i) + a_2^{(i)}(x - x_i)^2 + a_3^{(i)}(x - x_i)^3 \quad \text{für } \ x \in [x_{i-1}, x_i],$$

berechnet. Zur Lösung des linearen $(n - 1) \times (n - 1)$ Gleichungssystems (siehe Vorlesung)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2^{(1)} \\ a_2^{(2)} \\ \vdots \\ a_2^{(n-2)} \\ a_2^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

können Sie die bereits vorhandenen Funktionen zur LR-Zerlegung aus `hdnum` verwenden oder (5 Bonuspunkte) einen schnelleren Löser schreiben, welcher die tridiagonale Struktur der Matrix ausnutzt.

`Input-Parameter:`x_i, y_i `Output-Parameter:`$a_k^{(i)}$, $k = 0, \cdots, 3$, $i = 1, \cdots, n$

2. Schreiben Sie eine zweite Funktion `evaluateCubicSpline(...)`, die den in 1. berechneten Spline s an einer beliebigen Stelle $x \in [x_0, x_n]$ auswertet. Ausgegeben werden soll der Wert des Splines $s(x)$ bei Eingabe von $x_0, \cdots, x_n, a_k^{(i)}$ für $i = 1, \ldots, n$, $k = 0, \ldots, 3$ sowie eines Auswertepunktes x.

3. Testen Sie ihre Funktionen an folgendem höchst realistischen Beispiel:

   Die Geologen der Universität Heidelberg brauchen Ihre Hilfe. Auf der schwäbischen Alb wurden die Überreste von Versteinerungen gefunden, die zu einem Saurierskelett gehören. Um die Umrisse des Sauriers rekonstruieren zu können, wird das 14 mal 5 Meter große Fundgebiet mit einem Raster überzogen und jedes Fundstück Dinosaurierhaut in diesem Koordinatensystem lokalisiert. Nach einer logischen Reihung ergibt sich folgende Tabelle von Fundkoordinaten (x_i, y_i) für die von 0 bis 12 nummerierten Fundstücke:

Nr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	3.75	3.75	2.25	1.25	0.25	0.75	4.00	5.50	6.25	9.00	12.50	12.75	12.25
y_i	0.25	1.50	3.25	4.25	4.65	4.83	2.50	3.25	3.65	3.00	1.25	2.15	3.50

   Gehen Sie zur Rekonstruktion des Sauriers folgendermaßen vor: Die Gestalt des Sauriers wird durch eine Kurve

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, T]$$

   beschrieben, wobei die Funktionen ϕ und ψ durch je einen Spline genähert werden. Da das Durchlaufen der Kurve „mit konstanter Geschwindigkeit“ geschehen soll, lässt man die Bogenlänge der Kurve einfließen, indem man als Stützstellen die Werte

$$t_0 := 0, \quad t_i := t_{i-1} + \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad \text{für } i = 1, \ldots, 12$$

   benutzt. Berechnen Sie mit Ihrer Prozedur aus 1. einen Spline s_ϕ mit Stützstellen t_i und Stützwerten x_i sowie einen weiteren Spline s_ψ mit Stützstellen t_i und Stützwerten y_i. Die genäherte Gestalt des Sauriers ergibt sich dann aus der Kurve

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} s_\phi(t) \\ s_\psi(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [t_0, t_{12}]$$

   Werten Sie diese Kurve mit Ihrer Prozedur aus 2. an den Stellen $t = \xi_j := \frac{t_{12}}{100} \cdot j$, $j = 0, 1, \ldots, 100$ aus, und fertigen Sie eine (grobe) Skizze des Sauriers an, z.B. mit Gnuplot.

   Hinweise:

   - Sie können den Spline in Gnuplot visualisieren, wenn Sie die Ergebnisse in eine Datei schreiben, bei der in jeder Zeile ein Wertepaar x y steht:

     ```
     plot "test.dat" using 1:2 with lines
     ```

   - Erste Expertisen vermuten einen weiblichen Brontosaurus mittleren Alters.

(5 (+ 5 Bonus) Punkte)