

Übung 1 *Störungsanalyse*

Man betrachte das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der relative Fehler in den Matrixelementen betrage höchstens $\pm 1\%$, derjenige der Komponenten der rechten Seite höchstens $\pm 3\%$.

- Schätzen Sie die relativen Fehler $\|\delta x\|_1/\|x\|_1$ und $\|\delta x\|_\infty/\|x\|_\infty$ ab.
- Zeichnen Sie jeweils die Punktmenge in \mathbb{R}^2 , in der die Lösung $x + \delta x$ des gestörten Systems liegt.

(5 Punkte)

Übung 2 *Eine spezielle Tridiagonalmatrix*

Gegeben sei $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ von folgender Form:

$$T = \begin{pmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{pmatrix}.$$

mit $bc > 0$.

- (a) Zeigen Sie: T besitzt für $k = 1, \dots, n$ die Eigenwerte

$$\lambda_k = a + 2b\nu \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

mit den Eigenvektoren

$$v_k = \left(\nu \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \nu^2 \sin\left(2\frac{k\pi}{n+1}\right), \dots, \nu^n \sin\left(n\frac{k\pi}{n+1}\right) \right)^T.$$

wobei $\nu = \sqrt{\frac{c}{b}}$ ist.

Nützliche Hilfe: Für $l, x \in \mathbb{R}$ gilt die nützliche Formel:

$$2 \cos(x) \sin(lx) = \sin((l+1)x) + \sin((l-1)x)$$

- (b) Berechnen Sie für $a = 2$ und $b = c = -1$ die Kondition $\text{cond}_2(T)$. Geben Sie ihr Verhalten für $n \rightarrow \infty$ in Landaunotation an.

(5 Punkte)

Übung 3 Zur Gauß Elimination

a) Nach k Schritten der Gauß-Elimination hat die Matrix $A^{(k)}$ folgende Blockgestalt:

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} R_{11}^{(k)} & R_{12}^{(k)} \\ 0 & B^{(k)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

wobei $R_{11}^{(k)} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $R_{12}^{(k)} \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$ und $B^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$.

Zeigen Sie: Für die Blockzerlegung

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} \alpha^{(k)} & (w^{(k)})^T \\ \sigma^{(k)} & C^{(k)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

mit $C^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n-k-1) \times (n-k-1)}$ und $\sigma^{(k)}, w^{(k)} \in \mathbb{R}^{n-k-1}$, $\alpha^{(k)} \neq 0$ gilt die Rekursionsformel

$$B^{(k+1)} = C^{(k)} - \frac{1}{\alpha^{(k)}} \sigma^{(k)} (w^{(k)})^T. \quad (3)$$

b) Begründen Sie, dass auch folgender Algorithmus die LR Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durchführt. Es wird angenommen, dass keine Zeilenvertauschungen notwendig sind. Außerdem wird das Ergebniss der LR Zerlegung wieder direkt in der Matrix A gespeichert. Dabei gehören die Einträge unterhalb der Diagonalen zu L und die restlichen zu R . Ein formaler Beweis ist nicht verlangt.

```
for (i = 2...n) do
  for (j = 2...i) do
     $a_{i,j-1} = a_{i,j-1} / a_{j-1,j-1}$ 
    for (k = 1..j - 1) do
       $a_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k} a_{k,j}$ 
    end for
  end for
  for (j = i + 1...n) do
    for (k = 1..i - 1) do
       $a_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k} a_{k,j}$ 
    end for
  end for
end for
```

(5 Punkte)

Übung 4 Gauß-Elimination (Praktische Übung)

Schreiben Sie eine neue Headerdatei `gauss.hh`, die die Template-Funktion

```
template<typename NUMBER>
void gauss( hdnum::DenseMatrix<NUMBER> A, // Input A
            hdnum::Vector<NUMBER>& x, // Output x
            hdnum::Vector<NUMBER> b // Input b
          ) {
    ...
}
```

zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$) nach dem Eliminationsverfahren von Gauß. Führen Sie Zeilenvertauschung durch um sicherzustellen, dass die Pivotelemente ungleich Null sind.

Diese Headerdatei wird benötigt, damit das Hauptprogramm `gaussmain.cc` (siehe Webseite der Vorlesung) kompiliert werden kann und das dort aufgeführte Gleichungssystem $Ax = b$ nach x gelöst werden kann.

Kompilieren Sie das Programm für die beiden Datentypen `double` und `float` und überprüfen Sie, wie groß jeweils die Dimension n maximal sein darf, damit das Programm für das dort aufgeführte Gleichungssystem noch eine richtige Lösung liefert. **(5 Punkte)**