Übung 1 *LR-Zerlegung konkret*

Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 10 & \frac{15}{2} \\ -2 & 6 & 3 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & -\frac{11}{2} \\ -2 & 10 & -12 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 52 \\ 59 \\ -11 \\ -18 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie (mit Bleistift und Papier) die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung. Bestimmen Sie außerdem die Determinante von A und lösen Sie $Ax = b$.
- Berechnen Sie die Konditionszahl $\text{cond}_\infty(A)$.

(5 Punkte)

Übung 2 *Eigenschaften der LR-Zerlegung*

a) Zeigen Sie, dass die Menge der unteren Dreiecksmatrizen mit lauter Einsen auf der Hauptdiagonalen bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet. Ist diese Gruppe abelsch?

   Wenn eine LR-Zerlegung $A = LR$ (ohne Permutation) existiert lässt sich damit die Eindeutigkeit dieser Zerlegung zeigen. Dafür bekommen Sie einen Bonuspunkt.

b) Gegeben sei eine LR-Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $|l_{ij}| \leq 1$, $A = LR$ (keine Zeilenvertauschungen). Bezeichne a_i^T und r_i^T die i-te Reihe von A bzw. R. Zeigen Sie, dass

$$r_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_j^T$$

   gilt und verwenden Sie diese Beziehung, um

$$\|R\|_\infty \leq 2^{n-1} \|A\|_\infty$$

   zu beweisen (Norm der Gleichung bilden - dann Induktion).

(5 Punkte)

Übung 3 *Rückwärtsanalyse des Lösens eines Dreiecksystems*
Es seien $\hat{x}$ bzw. $\hat{y}$ die numerischen Lösungen des unteren bzw. oberen Dreieckssystems $Lx = b$ und $Ry = c$ mit $L, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt:

$$(L + F)\hat{x} = b \qquad |F| \leq n \text{ eps } |L| + O(\text{eps}^2) \tag{1}$$

$$(R + G)\hat{y} = c \qquad |G| \leq n \text{ eps } |R| + O(\text{eps}^2) \tag{2}$$

Hierbei sind $F, G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und für gegebenes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren wir mit $|A| \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix, welche die Beträge der Einträge von A enthält:

$$(|A|)_{i,j} = |a_{i,j}|.$$

Beweisen Sie Gleichung (1) durch Induktion (Gleichung (2) geht analog und muss nicht separat bewiesen werden). Tipp: Verwenden Sie mitunter $\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)$. **(5 Punkte)**

Übung 4 *LR Zerlegung für symmetrisch positiv definite Matrizen (Praktische Übung)*
In dieser praktischen Übung sollen Sie die LR Zerlegung ohne Zeilenvertauschung auf eine symmetrisch positv definite Matrix anwenden und die dabei auftretenden pivot Elemente untersuchen.

a) Schreiben Sie eine neue Headerdatei `lr_no_pivot.hh`, welche die Template-Funktion

```
template<class T>
void lr_no_pivot( hdnum::DenseMatrix<T>& A, hdnum:Vector<T>& pivotElements)
{...}
```

enthält.

Die Funktion `void lr_no_pivot(...)` soll die LR-Zerlegung ohne Zeilenvertauschung von A berechnen und die Ergebnisse L und R wiederum in die Matrix `A` speichern. In dem Vektor `pivotElements` sollen die pivot Elemente gespeichert werden.

Mit dieser Headerdatei können Sie das auf der Vorlesungsseite zur Verfügung gestellte Hauptprogramm `lr_rohrleitungsnetzwerk.cc` ausführen. Dort wird für $n = 15$ die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ des Gleichungssystems zum Rohrleitungsnetzwerk aus den früheren Übungen aufgestellt. Wenden Sie ihre Funktion `void lr_no_pivot(...)` auf diese Matrix an und geben Sie die pivot Elemente aus.

b) Fügen Sie den Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ zum Programm hinzu mit $(b)_i = 0$ für $0 < i < n$ und $(b)_n = 10$. Dieser Vektor entspricht gerade der rechten Seite des Gleichungssystems $Ax = b$ aus der Rohrleitungsaufgabe für die Flussrate $q_P = 10$.

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mithilfe Ihrer LR Zerlegung aus der ersten Teilaufgabe. Für die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution dürfen Sie die Funktionen

```
//! Assume L = lower triangle of A with l_ii=1, solve L x = b
template<class T>
void solveL (const DenseMatrix<T>& A, Vector<T>& x, const Vector<T>& b)
{...}
```

und

```
//! Assume R = upper triangle of A and solve R x = b
template<class T>
void solveR (const DenseMatrix<T>& A, Vector<T>& x, const Vector<T>& b)
{...}
```

verwenden welche bereits in HDNum implementiert sind.

c) Überprüfen Sie ihr Ergebniss indem Sie den relativen Fehler des Residuums

$$r = \frac{||A\hat{x} - b||_2}{||b||_2}$$

ausrechnen und ausgeben. Dabei sei $\hat{x}$ die numerische Lösung des Gleichungssystems.

Vorsicht: Durch das Aufstellen der LR Zerlegung und durch die Vorwärts-/Rückwärtssubstitution wurden die Matrix A und der Vektor b überschrieben. Das müssen Sie beim ausrechnen von r beachten!

(5 Punkte)