

### Übung 1 *Newton Interpolation*

- Interpolieren Sie die Funktion  $f(t) = \sqrt{t}$  mit Hilfe des Newton'schen Interpolationspolynoms vom Grad 2 ( $p_2 \in \mathcal{P}_2$ ) zwischen den Stützstellen  $t_0 = \frac{1}{4}$ ,  $t_1 = 1$ , und  $t_2 = 4$ .
- Nehmen sie die Stützstelle  $t_3 = 9$  hinzu und berechnen Sie das Interpolationspolynom  $p_3 \in \mathcal{P}_3$ .
- Skizzieren Sie die Graphen von  $f$  und  $p_2$  und  $p_3$  (per Hand oder mit Gnuplot).

( 5 Punkte )

### Übung 2 *Komplexität der Interpolation*

Sei  $p \in P_n$  das Interpolationspolynom zu den  $n+1$  paarweise verschiedenen Stützstellen  $t_0, \dots, t_n$  mit den zugehörigen Werten  $y_0, \dots, y_n$ . Bestimmen Sie die Anzahl der benötigten Operationen

- zur Berechnung der Koeffizienten von  $p$
  - und zur Auswertung von  $p$  an einer beliebigen Stelle  $t = \xi$
- bezüglich der Lagrange-Basis,
  - bezüglich der Newton-Basis und
  - bezüglich der Monom-Basis.

*Hinweis: Die sehr naive Auswertung des Polynoms  $p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$  (in der Monom-Basis) erfordert  $O(n^2)$  Multiplikationen und  $n$  Additionen. Dagegen wird beim **Hornerschema***

$$p(t) = a_0 + (t \cdot (a_1 + t \cdot (\dots (a_{n-1} + t \cdot a_n) \dots)))$$

*von innen nach außen ausgewertet. Wieviele Additionen und Multiplikationen sind dafür notwendig?*

( 5 Punkte )

### Übung 3 *Dividierte Differenzen*

Beweisen Sie, dass die dividierten Differenzen invariant unter Permutation der Stützstellen sind: Geben seien  $n$  paarweise verschiedene Stützstellen  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$  und eine Permutation derselben  $\{\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}\}$ . Zeigen Sie

$$f[x_0, \dots, x_{n-1}] = f[\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}].$$

( Bonus 5 Punkte )

### Übung 4 *Lagrange Interpolation (Praktische Übung)*

Alle in dieser Aufgabe zu programmierende Funktionen sollen einen `template` Parameter akzeptieren, der es erlaubt den Typ zur näherungsweisen Repräsentation der reellen Zahlen zu setzen. Matrizen und Vektoren sollen durch die Klassen der `HDNum C++` Bibliothek repräsentiert werden.

- Schreiben Sie eine Funktion, welche für gegebene Stützstellen  $(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}$  und Werte  $(y_i)_{i=1}^n$  einer eindimensionalen Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  das zugehörige Interpolationspolynom an der Stelle  $x$  auswertet (z.B. in Lagrange Darstellung).

- b) Schreiben Sie ein Programm, das die Funktionen  $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$  und  $f_2(x) = \sqrt{|x|}$  im Intervall  $I = [-1, 1]$  mit äquidistanten Stützstellen  $x_i = -1 + ih$ ,  $i = 0, \dots, n$ , mit  $h = 2/n$ , für  $n = 5, 10, 20$  durch ein Polynom  $p_n$  vom Grad  $n$  interpoliert.

Werten Sie die Interpolationspolynome mit Hilfe des Horner-Schemas auf einem dichten Gitter (1000 Gitterpunkte) aus, stellen Sie die Ergebnisse graphisch dar und vergleichen Sie sie mit den richtigen Funktionsverläufen.

( Bonus 5 Punkte )