

Übung 1 *Newton Interpolation*

- Interpolieren Sie die Funktion $f(t) = \sqrt{t}$ mit Hilfe des Newton'schen Interpolationspolynoms vom Grad 2 ($p_2 \in \mathcal{P}_2$) zwischen den Stützstellen $t_0 = \frac{1}{4}$, $t_1 = 1$, und $t_2 = 4$.
- Nehmen sie die Stützstelle $t_3 = 9$ hinzu und berechnen Sie das Interpolationspolynom $p_3 \in \mathcal{P}_3$.
- Skizzieren Sie die Graphen von f und p_2 und p_3 (per Hand oder mit Gnuplot).

(5 Punkte)

Übung 2 *Komplexität der Interpolation*

Sei $p \in P_n$ das Interpolationspolynom zu den $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen t_0, \dots, t_n mit den zugehörigen Werten y_0, \dots, y_n . Bestimmen Sie die Anzahl der benötigten Operationen

- zur Berechnung der Koeffizienten von p
 - und zur Auswertung von p an einer beliebigen Stelle $t = \xi$
- bezüglich der Lagrange-Basis,
 - bezüglich der Newton-Basis und
 - bezüglich der Monom-Basis.

*Hinweis: Die sehr naive Auswertung des Polynoms $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ (in der Monom-Basis) erfordert $O(n^2)$ Multiplikationen und n Additionen. Dagegen wird beim **Hornerschema***

$$p(t) = a_0 + (t \cdot (a_1 + t \cdot (\dots (a_{n-1} + t \cdot a_n) \dots)))$$

von innen nach außen ausgewertet. Wieviele Additionen und Multiplikationen sind dafür notwendig?

(5 Punkte)

Übung 3 *Dividierte Differenzen*

Beweisen Sie, dass die dividierten Differenzen invariant unter Permutation der Stützstellen sind: Geben seien n paarweise verschiedene Stützstellen $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ und eine Permutation derselben $\{\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}\}$. Zeigen Sie

$$f[x_0, \dots, x_{n-1}] = f[\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}].$$

(Bonus 5 Punkte)

Übung 4 *Lagrange Interpolation (Praktische Übung)*

Alle in dieser Aufgabe zu programmierende Funktionen sollen einen `template` Parameter akzeptieren, der es erlaubt den Typ zur näherungsweisen Repräsentation der reellen Zahlen zu setzen. Matrizen und Vektoren sollen durch die Klassen der `HDNum C++` Bibliothek repräsentiert werden.

- Schreiben Sie eine Funktion, welche für gegebene Stützstellen $(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}$ und Werte $(y_i)_{i=1}^n$ einer eindimensionalen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ das zugehörige Interpolationspolynom an der Stelle x auswertet (z.B. in Lagrange Darstellung).

- b) Schreiben Sie ein Programm, das die Funktionen $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $f_2(x) = \sqrt{|x|}$ im Intervall $I = [-1, 1]$ mit äquidistanten Stützstellen $x_i = -1 + ih$, $i = 0, \dots, n$, mit $h = 2/n$, für $n = 5, 10, 20$ durch ein Polynom p_n vom Grad n interpoliert.

Werten Sie die Interpolationspolynome mit Hilfe des Horner-Schemas auf einem dichten Gitter (1000 Gitterpunkte) aus, stellen Sie die Ergebnisse graphisch dar und vergleichen Sie sie mit den richtigen Funktionsverläufen.

(Bonus 5 Punkte)