Übung 1 *Bézier-Kurve zur Approximation des Sinus*
Berechnen Sie die Bézier-Punkte $P_0, \ldots, P_3$, deren zugehörige Bézier-Kurve $B(t)$ vom Grad 3 den Graphen

$$S(t) = \begin{pmatrix} \pi t \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $t = [0, 1]$ approximiert. Dabei sollen die Bedingungen

$$\begin{aligned} S(0) &= B(0) & S(1) &= B(1) \\ S'(0) &= \alpha B'(0) & S'(1) &= \alpha B'(1) \end{aligned}$$

erfüllt sein. Hierbei sei α so gewählt, dass zusätzlich

$$B(0.5) = S(0.5)$$

gilt.

(5 Punkte)

Übung 2 *Schema von Neville-Aitken*
Sei P_k der Raum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad maximal k, $k \in \mathbb{N}_0$. Sei $p_{i,k} \in P_k$ das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom zu den Wertepaaren $(x_i, y_i), \ldots, (x_{i+k}, y_{i+k})$.

a) Zeigen Sie, dass folgende Rekursionsformel gilt:

$$(i) \quad p_{i,0}(x) = y_i \qquad \text{für } i = 0, ..., n,$$

$$(ii) \quad p_{i,k}(x) = \frac{(x - x_i)p_{i+1,k-1}(x) - (x - x_{i+k})p_{i,k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i} \qquad \text{für } i = 0, ..., n-k.$$

b) Damit lässt sich das Interpolationspolynom $p_{0,n}(x)$ zu den Wertepaaren $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ an einem Punkt $x = \xi$ auswerten, ohne die Koeffizienten des Polynoms explizit zu berechnen.

Anmerkung: Unter der Annahme, dass $\xi \neq x_i \, \forall i$ gilt verwendet man aus Stabilitätsgründen bei der Implementierung die Darstellung

$$p_{i,k}(\xi) = p_{i,k-1}(\xi) + \frac{p_{i,k-1}(\xi) - p_{i+1,k-1}(\xi)}{\frac{\xi - x_{i+k}}{\xi - x_i} - 1}.$$

Für veschiedene Orte wurde an einem bestimmten Tag die Tageslänge gemessen:

Ort	Tageslänge	Lage
A	17h 28m	55,7 °
B	18h 00m	57,7 °
C	18h 31m	59,3 °
D	19h 56m	62,6 °

Bestimmen Sie die Tageslänge am Ort E bei 61,7 ° durch Auswertung des zugehörigen Interpolationspolyoms mit Hilfe der obigen Rekursionsformel. Es genügt auf 2 Nachkommastellen genau zu rechnen.

(5 Punkte)

Übung 3 *Numerische Differentiation*

a) Sei $f \in C^2([a,b])$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[a,b]$. Bei der numerischen Auswertung von $f'(x)$ wählt man eine möglichst kleine Schrittweite h und berechnet den *Vorwärtsdifferenzenquotienten*

$$d_h = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Der Differenzquotient d_h wird exakt berechnet und nicht mit Gleitkommazahlen. Zeigen Sie, dass für den dabei gemachten *Diskretisierungsfehler* gilt:

$$|d_h(x) - f'(x)| \leq c \cdot h, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

b) Doch die Schrittweite h darf man nicht zu klein wählen, denn bei der numerischen Differenziation spielt die Auslöschung eine wesentliche Rolle. Sei $f(x)$ der echte Wert von f an der Stelle x und $\tilde{f}(x)$ seine Darstellung auf einem Computer, der mit der Maschinengenauigkeit eps arbeitet. Es gelte also $|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq eps$.

Zeigen Sie, dass man die Schrittweite h in der Größenordnung von $\sqrt{eps}$ wählen sollte, um den *Gesamtfehler*

$$|\tilde{d}_h(x) - f'(x)|$$

zu minimieren.

Hinweis: Untersuchen Sie zuerst $|\tilde{d}_h(x) - d_h(x)|$. Bei der Abschätzung von $|\tilde{d}_h(x) - f'(x)|$ benutzen Sie das Ergebnis a)

(5 Punkte)

Übung 4 *Numerische Differentiation (Praktische Übung)*

a) Schreiben Sie eine Funktion, welche die zweite Ableitung von $\sinh(x)$ für $x = 0.6$ mit dem zweiten Differenzenquotient für ein gegebenes h approximiert

$$a(h) := \frac{\sinh(x+h) - 2\sinh(x) + \sinh(x-h)}{h^2} \approx \frac{d^2}{dx^2}\sinh(x)$$

Berechnen Sie die Werte $a(h_i)$ für $h_i = 2^{-i}$, $i = 1, \ldots, 20$ und vergleichen Sie mit dem exakten Wert der zweiten Ableitung.
Erinnerung: $\frac{d^2}{dx^2}\sinh(x) = \sinh(x)$.

b) Bis etwa $i = 12$ wird der Fehler kleiner. Mit welcher Ordnung nimmt der Fehler ab? Ermitteln Sie anhand Ihrer Ausgabe das j, sodass sich der Fehler wie $\mathcal{O}(h^j)$ verhält.

Warum werden die Werte für kleiner werdendes h irgendwann schlechter?

c) Untersuchen Sie inwieweit man Extrapolation zum Limes verwenden kann um die numerischen Werte zu verbessern. Schreiben Sie eine Funktion, welche die Stützpunkte $\tilde{h}_j$, $j \in \{0, \ldots, k\}$ erhält und $a(0)$ durch Extrapolation zum Limes approximiert.

Berechen Sie für $h_i = 2^{-i}$, $i = 1, \ldots, 10$ die Approximation mit zwei Stützstellen $(h_i, h_i/2)$ bzw. drei Stützstellen $(h_i, h_i/2, h_i/4)$. Wie verhält sich der Fehler?

d) Die Bearbeitung dieses Aufgabenteils ist 2 Bonuspunkte wert. Nutzen Sie bei ihrer Extrapolation zum Limes aus, dass sich $a(h)$ als Reihe in h^2 schreiben lässt. Verwenden Sie dafür die Stützpaare $(h_i^2, a(h_i))$ anstelle von $(h_i, a(h_i))$.

   Wie wirkt sich diese Änderung auf die Konvergenz des Fehlers aus (wiederum zwei und drei Stützstellen)?

   Anmerkung: Man nennt dieses Modifikation Richardson Extrapolation.

(5 Punkte)