Prof. Dr. Peter Bastian, René Heß Abgabe 4. Mai 2017

IWR, Universität Heidelberg

Allgemeine Hinweise:

- Abgabe der Übungszettel immer Donnerstags bis 14 Uhr in den Zettelkästen im Mathematikon (die noch eingerichtet werden).
- Der neue Übungszettel wird Donnerstags online gestellt.
- Es wird einen ganz normalen Übungsbetrieb geben, d.h. Sie geben den bearbeiteten Übungszettel ab, die Abgabe wird korrigiert und in der Übung besprochen. Es werden alle Aufgaben korrigiert.
- Für eine Klausurzulassung benötigen Sie 50% der Punkte und Sie müssen mindestens einmal vorgerechnet haben.

Übung 1 *Umformung von AWA*

1. Formen Sie das Anfangswertproblem

$$u_1''(t) = t^2 - u_1'(t) - u_2^2(t),$$
$$u_2''(t) = t - u_2'(t) - u_1^3(t),$$
$$u_1(0) = 0,\ u_2(0) = 1,\ u_1'(0) = 1,\ u_2'(0) = 0$$

   in ein äquivalentes *autonomes* System erster Ordnung um.

2. Formen Sie das folgende System von Differentialgleichungen höherer Ordnung in ein äquivalentes System erster Ordnung um

$$u_1'''''(t) - a(t)u_2''(t) = f(t),$$
$$u_2''(t) + b(t)u_1(t) = g(t).$$

(5 Punkte)

Übung 2 *Existenz und Eindeutigkeit der Lösung*

1. Zeigen Sie, dass für

$$u'(t) = a\,u(t) + b(t), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad u_0 \in \mathbb{R}^n$$

   mit $a \in \mathbb{R}$ und stetigem $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$u(t) = e^{a(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}b(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

   eine Lösung gegeben ist.

2. Beweises Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für das Anfangswertproblem

$$u' = (1 + |u|)^{-1} \quad u(0) = u_0$$

auf dem Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(5 Punkte)

Übung 3 *Lineare Anfangswertaufgaben*

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrisch positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass dann die global eindeutige Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des linearen Anfangswertproblems

$$u'(t) = Au(t), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad u_0 \in \mathbb{R}^n$$

durch

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i e^{\alpha_i t}$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $\zeta_i \in \mathbb{R}^d$ dargestellt werden kann. Welche Bedeutung haben die Zahlen α_i und Vektoren ζ_i?

2. Bestimmen Sie die Lösung der AWA

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} u(t), \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$.

(5 Punkte)

Übung 4 *Einführung in die hdnum (praktische Übung)*

Diese "Übung" ist keine richtige Aufgabe, es handelt sich vielmehr um eine kurze Einführung in die C++ Bibliothek hdnum, die wir für die praktischen Übungen verwenden werden.

Für die Bearbeitung der Programmieraufgaben verwenden wir die C++ Bibliothek *hdnum*. Diese bietet die Möglichkeit in C++ mit Matrizen und Vektoren zu rechnen und Gleichungssysteme und gewöhnliche Differentialgleichungen zu lösen.

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass Sie Zugang zu einem Computer mit unixoiden Betriebssystem haben um die praktischen Übungen zu bearbeiten. Falls Sie auf ihrem Computer keine derartiges Betriebssystem installiert haben gibt es folgende Möglichkeiten:

- Sie sollten sich auf alle Fälle bei Ihrem Tutor melden.
- Sie installieren eine Linux Distribution in eine virtuelle Maschine. Dafür müssen Sie das Programm *virtualbox* installieren und danach eine Linux Distribution (z.B. Ubuntu) in dieser virtuellen Maschine installieren.
- Sie benutzen Linux über das Universitätsrechenzentrum. Sie können ein Linux unter dem Ordner `terminal` finden wenn Sie auf *alle Programme* klicken. Um die hdnum vewenden zu können müssen Sie in der Datei `hdnum.hh` die Option `#define HDNUM_HAS_GMP 1` auf `0` setzen. Um das Linux wieder zu verlassen können Sie Strg+Alt+Entf drücken.

Grundlegende Unix und C++ Programmierkentnisse werden vorausgesetzt. Sollten Sie eine Auffrischung benötigen finden Sie auf der Vorlesungshomepage Folien mit einer Programmiereinführung.

Gehen Sie folgendermaßen vor um die hdnum zu benutzen:

- Gehen Sie auf die Vorlesungshomepage, downloaden und entpacken sie die aktuelle Version der hdnum.
- Um die hdnum zu verwenden müssen Sie die hdnum in ihrem C++ Programm inkludieren

```
#include "hdnum.hh"
```

und sicherstellen, dass Ihr Compiler die Datei finden kann. Beispielsweise können Sie das Programm `modelproblem` aus dem Ordner `hdnum/examples/num1` bauen indem Sie es mit

```
g++ -I ../../ -o modelproblem modelproblem.cc
```

kompilieren (natürlich müssen Sie vorher im Terminal zum Ordner `hdnum/examples/num1` gehen).

Noch ein paar Hinweise zu hdnum:

- Am besten schauen Sie sich die Beispiele in `hdnum/examples/num1` an. Das Programm `modelproblem.cc` ist ein guter Einstieg.
- Den Sourcecode der hdnum finden sie im Verzeichnis `hdnum/src/`.
- Eine von Doxygen generierte Dokumentation können Sie im Ordner `hdnum/doc/html/` finden. Öffen Sie einfach eine beliebige html Datei. Sind Sie beispielsweise daran interessiert was die `DenseMatrix` alles machen kann können Sie auf `Class List` und danach auf `DenseMatrix` klicken.

Bei Fragen oder Problemen wenden Sie sich einfach an Ihren Tutor.

(0 Punkte)

Übung 5 *Eine einfache Anfangswertaufgabe (praktische Übung)*

Gegeben sei die AWA

$$u'(t) = -200\,t\,u(t)^2, \quad t_0 := -3 \leq t \leq 3, \quad u(t_0) = \frac{1}{901}.$$

1. Implementieren Sie die gegebene AWA analog zu der Implementierung des exponentiellen Wachstumsgesetzes in der Datei *modelproblem.hh* (alle hier angegebenen Dateien sind im examples Verzeichnis der *hdnum* Bibliothek zu finden).
2. Schreiben Sie ein Programm, welches Approximationen der analytischen Lösung mit Hilfe des expliziten Euler Verfahrens berechnet (siehe hierzu auch die Datei *modelproblem.cc*). Sie dürfen die Implementierung des Expliziten Euler Verfahrens aus der Datei *expliciteuler.hh* verwenden.
3. Visualisieren Sie Ihre numerische Lösung $u_h(t)$ und die exakte Lösung $u(t) = (1 + 100t^2)^{-1}$ im Intervall $[-3, 3]$ mit Gnuplot (oder einem anderen Programm).
4. (Bonusaufgabe) Verifizieren Sie für konstante Schrittweiten $h = 2^{-i}$, $i = 2, \ldots, 15$ die Konvergenz 1. Ordnung dieses Verfahrens zum Zeitpunkt $t = 1$ (die exakte Lösung ist $u(t) = (1 + 100t^2)^{-1}$). Das Beispielprogramm *ordertest.cc* ist hierfür eine gute Vorlage.

(5+2 Punkte)