Prof. Dr. Peter Bastian, René Heß Abgabe 11. Mai 2017

IWR, Universität Heidelberg

Übung 1 *Lösbarkeitseigenschaften*

Untersuchen Sie mit Hilfe der Resultate aus der Vorlesung die Lösbarkeitseigenschaften (Existenz und Eindeutigkeit, Stabilität und globale Stabilität, Beschränkheit, Exponentielle Stabilität) der folgenden AWAn:

1. $u'(t) = u(t)^2, \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1,$
2. $u'(t) = -u(t)^2, \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1,$
3. $u'(t) = u(t)^{1/3}, \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1,$
4. $u'(t) = \cos(u(t)) - 2u(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1.$

Gehen Sie soweit wie möglich ohne explizite Angabe der exakten Lösung vor.

(5 Punkte)

Übung 2 *Abschneidefehler*

Der Abschneidefehler des impliziten Euler Verfahrens zur Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad t \geq t_0,\ u(t_0) = u_0$$

ist gegeben durch

$$\tau_n^h = h_n^{-1}\left(u(t_n) - u(t_{n-1})\right) - f(t_n, u(t_n)),$$

wobei $(t_n)_{n\geq 0}$ eine Folge diskreter Zeitpunkte und $h_n = t_n - t_{n-1}$ die zugehörigen Schrittweiten darstellen.

Zeigen Sie durch Taylor-Entwicklung von $u(\cdot)$ um t_n, dass gilt:

$$\|\tau_n^h\| = \frac{h_n}{2}\|u''(\xi_n)\| \text{ für ein } \xi_n \in [t_{n-1}, t_n].$$

(5 Punkte)

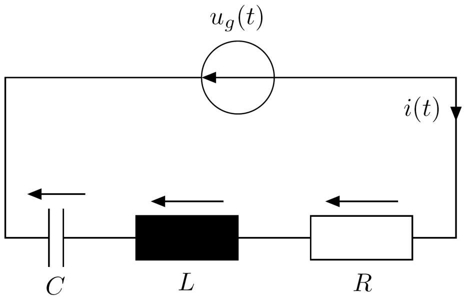
Übung 3 *Autonom und exponentiell stabil*

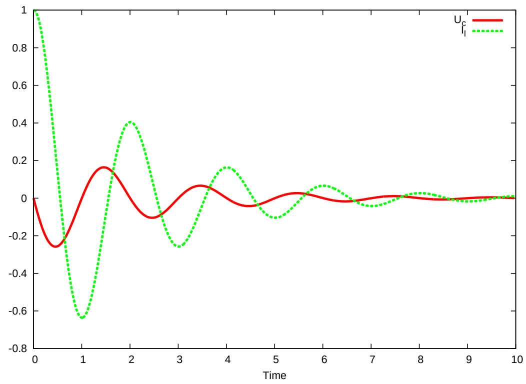
1. Eine Anfangswertaufgabe $u'(t) = f(x,t)$ sei autonom ($f(x,t) = f(x)$) und exponentiell stabil. Zeigen Sie, dass $u(t)$ dann gleichmäßig stetig ist.
2. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Lösung einer autonomen AWA deren Funktion f die Lipschitz Bedingung erfüllt keineswegs gleichmäßig stetig sein muss.

(5 Punkte)

Übung 4 *Gedämpfter Reihenschwingkreis (praktische Übung)*

Im folgenden soll ein Programm zur Simulation eines einfachen elektronischen Netzwerkes implementiert werden. Wir betrachten einen gedämpften Reihenschwingkreis:





Die Beziehungen der einzelnen Bauelemente lauten:

$$u_R(t) = Ri_R(t),$$
$$u_L(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t),$$
$$i_C(t) = C\frac{d}{dt}u_C(t).$$

Durch eine Anwendung der Knoten- und Maschenregeln, kann hieraus die Beziehung

$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_g(t)$$

abgeleitet werden. Letztere beschreibt eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche durch die Wahl geeigneter Anfangsbedingungen $u_C(t_0)$ und $\frac{du_C}{dt}\big|_{t=t_0} = \frac{i_L(t_0)}{C}$ sowie der äußeren Spannung $u_g(t)$ auf ein Anfangswertproblem festgelegt wird.

Durch einsetzen von $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i_L}{C}$ erhält man ein System erster Ordnung:

$$\frac{d}{dt}i_L(t) = \frac{1}{L}(u_g - u_C - Ri_L),$$
$$\frac{d}{dt}u_C(t) = \frac{i_L}{C}.$$

Dieses System wird durch die Wahl von $i_L(t_0)$ und $u_C(t_0)$ auf ein Anfangswertproblem festgelegt.

1. Implementieren Sie ein C++ Programm mit der Hilfe von *hdnum*, welches dieses System mit dem expliziten Euler verfahren numerisch löst. Gehen Sie dabei ähnlich zu *modelproblem.cc* und *modelproblem.hh* aus dem Beispielordner der *hdnum* vor.

2. Testen Sie ihr Programm für den Fall $u_g = 0$ und die Anfangsbedingungen $u_C(t_0) = 0$ sowie $i_L(t_0) = 1$. Setzen Sie die Kenngrößen $L = R = 1$, $C = 0.1$ und $\Delta t = 0.01$. Simulieren Sie den Zeitraum $t = 0 \dots 10$.

3. Visualisieren Sie die Lösung $u_c(t)$ und $i_L(t)$ im Intervall $[0, 10]$ mit Gnuplot (oder einem anderen Programm).

4. (Bonusaufgabe) Experimentieren Sie mit periodischen externen Spannungen u_g (z.B. $u_g = \sin(t)$, oder Sägezahn-Spannungen).

(5+1 Punkte)