Prof. Dr. Peter Bastian, René Heß

IWR, Universität Heidelberg

Abgabe 18. Mai 2017

Übung 1 *Numerische Integration mit Euler- und Heun-Verfahren*

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad u(a) = 0,$$

mit einer gegebenen hinreichend glatten Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Wenden Sie das explizite Euler-Verfahren und das Verfahren von Heun mit konstanter Schrittweite $h = (b - a)/N$ auf die AWA an. Dadurch erhalten Sie Näherungsformeln für $u(b)$ welche mithilfe der Integraldarstellung Näherungen für $\int_a^b f(t)dt$ liefern.

1. Geben Sie die Näherungsformeln für das Integral an.
2. Wie heißen die zugehörigen Quadraturformeln?
3. Geben sie die oberen Schranken für die von h abhängigen Integrationsfehler an.

(5 Punkte)

Übung 2 *Konsistenzordnung*

1. Welche Konsistenzordnung hat das Heun-Verfahren?

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2} f(t_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{h}{2} f(t_n, y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1}))$$

   Sie dürfen Resultate aus der Vorlesung verwenden.

2. Zeigen Sie, dass das Nyström Einschrittverfahren mit Butcher Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{array}$$

   die Konsistenzordnung drei besitzt.

(5 Punkte)

Übung 3 *Rundungsfehler*

Bei der Durchführung einer expliziten (L-stetigen) Einschrittmethode mit Lösung $u(t)$ für $t \geq t_0$ und numerischer Approximation durch eine Gitterfunktion $(\tilde{y}_n)_{n \geq 0}$, wird wegen des unvermeidbaren Rundungsfehlers eine gestörte Rekursion

$$\tilde{y}_n = \tilde{y}_{n-1} + h_n F(h_n; t_{n-1}, \tilde{y}_{n-1}) + \varepsilon_n, \quad n \geq 1,$$

gelöst. Die "lokalen" Fehler verhalten sich dabei wie $\|\varepsilon_n\| \propto \text{eps}\|\tilde{y}_n\|$, wobei eps den maximalen relativen Rundungsfehler bezeichnet. Beweisen Sie die Abschätzung

$$\|\tilde{y}_n - u(t_n)\| \leq K(t_n)\left(\|\tilde{e}_0\| + \max_{1\leq m\leq n}\|\tau_m\| + \text{eps}\max_{1\leq m\leq n} h_m^{-1}\|\tilde{y}_m\|\right).$$

(5 Punkte)

Übung 4 *Runge-Kutta Verfahren dritter Ordnung (praktische Übung)*

Betrachten Sie die AWA

$$u'(t) = -\frac{t}{u(t)} \qquad (-0.5 \leq t < 1)$$
$$u(-0.5) = \sqrt{0.75}$$

1. Lösen Sie die AWA näherungsweise mit dem expliziten Euler Verfahren für die konstanten Schrittweiten $h = 2^{-i}$, $i = 3, \ldots, 10$. Berechnen Sie für diese Schrittweiten die Konvergenzordnung zum Zeitpunkt $t = 0$ über die unten angegebene Formel (die exakte Lösung lautet $u(t) = \sqrt{1-t^2}$).
2. Implementieren Sie das Runge-Kutta-Nyström Verfahren dritter Ordnung (siehe Übung 2). Als Vorlage hierfür kann die Klasse `Kutta3` aus der Datei `hdnum/src/ode.hh` dienen. Verifizieren Sie für dieselben Schrittweiten die Konvergenz 3. Ordnung zum Zeitpunkt $t = 0$.
3. Untersuchen Sie für beide Verfahren die Konvergenzordnung zum Zeitpunkt t=1. Was beobachten Sie und wie lässt sich das Verhalten erklären?

Konvergenzordnung: In vielen Fällen kann die Konvergenzordnung eines Grenzprozesses

$$a(h) \to a(h \to 0), \quad \|a(h) - a\| = O(h^\alpha),$$

nur experimentell bestimmt werden. Dazu werden bei bekanntem Limes a für zwei Werte h und $h/2$ die Fehler $\|a(h)-a\|$ und $\|a(h/2)-a\|$ berechnet und dann die Ordnung α über den formalen Ansatz $\|a(h)-a\| = ch^\alpha$ aus der folgenden Formel ermittelt:

$$\alpha = \frac{1}{\log(2)}\log\left(\frac{\|a(h)-a\|}{\|a(h/2)-a\|}\right)$$

(5 Punkte)