
Übung 1 *hp - Verfeinerung*

Für eine gegebene AWA gebe es Einschrittverfahren mit Lipschitz-stetigen Verfahrensfunktionen $F_p(h_i, t_k, y_k^h, y_{k-1}^h)$ der Ordnung p zur Schrittweite $h_i = 2^{-i}$. Wir nehmen an, die damit berechneten Approximationen $Y_{p,i}$ der exakten Lösung $u(T)$ zum Zeitpunkt T genügen

$$\|e_{p,i}\| := \|Y_{p,i} - u(T)\| = K\,T\,h_i^p + \mathcal{O}(h_i^{p+1}).$$

Hierbei sei die Konstante $K \in \mathbb{R}$ unabhängig von der Wahl von p, i.

Eine Lösung $Y_{p,i}$ sei berechnet, aber ihre Genauigkeit unbefriedigend. Die Kosten der Berechnung seien gegeben durch

$$r(i,p) = 2^i \cdot m(p)$$

mit einer monoton wachsenden Funktion m. Diskutieren Sie unter welchen Voraussetzungen an i, p und m die Berechnung von $Y_{p+1,i}$ viel versprechender ist als die Berechnung von $Y_{p,i+1}$.

(5 Punkte)

Übung 2 *Runge-Kutta Verfahren Konsistenz Allgemein*

Ein allgemeines explizites Runge-Kutta Verfahren hat die Form

$$y_n^h = y_{n-1}^h + h_n F(h_n; t_{n-1}, y_{n-1}^h)$$

mit der Verfahrensfunktion

$$F(h;t,x) = \sum_{i=1}^{s} b_i k_i(h;t,x), \qquad k_i(h;t,x) = f\left(t + hc_i, x + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j\right),$$

und Konstanten a_{ij}, b_i, c_i, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j < i$. Zeigen Sie:

1. Dieses Verfahren genügt der Lipschitz-Bedingung

$$\|F(h;t,x) - F(h;t,y)\| \leq L\|x - y\|,$$

   wenn die Funktion $f(t,x)$ die Lipschitz-Bedingung erfüllt.

2. Das Verfahren ist genau dann konsistent, wenn $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$ ist.

(5 Punkte)

Übung 3 *Alternativer Konvergenzbeweis*

Zeigen Sie die globale Konvergenz des expliziten Euler-Verfahrens, $y_n^h = y_{n-1}^h + h_n f(t_{n-1}, y_{n-1}^h)$, $n \geq 1$, $y_0^h = u_0^h$ für global L-stetige und **strikt monotone** AWAn unter der Schrittweitenbedingung

$$h = \sup_{n\geq 1} h_n < \frac{2\lambda}{L^2}.$$

Leiten Sie hierfür die globale Fehlerabschätzung

$$||y_n^h - u(t_n)|| \leq c \max_{1\leq\nu\leq n} \left(h_\nu \max_{I_\nu} ||u''|| \right), \quad t_n \geq t_0.$$

her.

Gehen Sie folgendermaßen vor:

1. Nutzen Sie die Youngsche Ungleichung in der Form $2ab \leq \varepsilon^{-1}a^2 + \varepsilon b^2$ und die Beziehung $2||e_n||^2 - 2(e_{n-1}, e_n) = ||e_n||^2 + ||e_n - e_{n-1}||^2 - ||e_{n-1}||^2$ um folgende Abschätzung zu beweisen:

   $$(1 - h_n\alpha)||e_n||^2 \leq (1 - h_n\kappa)||e_{n-1}||^2 + \frac{h_n}{\alpha}||\tau_n||^2 \quad \forall \alpha > 0$$

   mit $\kappa = 2\lambda - hL^2$.

2. Beweisen Sie damit induktiv

   $$||e_n||^2 \leq \frac{8}{\kappa^2} \max_{1\leq\nu\leq n} ||\tau_\nu||^2.$$

   Sie dürfen hier $hK < 1$ annehmen.

3. Verwenden Sie die Abschätzung des Abschneidefehlers für das explizite Euler Verfahren aus der Vorlesung.

Hinweis: Wenn Sie bei einzelnen Teilschritten nicht weiter kommen, benutzen Sie die angegeben Ergebnisse um weiterzurechnen.

(5 Punkte)

Übung 4 *Arenstorf-Orbit (praktische Übung,* ***Bearbeitungszeit 2 Wochen****)*

Der Arenstorf-Orbit beschreibt geschlossene Trajektorien eines Satellits rund um die Erde und den Mond. In einem restringierten Koordinatensystem ist dieses 3-Körper Problem für die x und y Koordinaten des Sateliten gegeben durch

$$\begin{aligned} x'' &= x + 2y' - \mu_1 \frac{x + \mu_2}{N_1} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{N_2}, \\ y'' &= y - 2x' - \mu_1 \frac{y}{N_1} - \mu_2 \frac{y}{N_2}, \end{aligned}$$

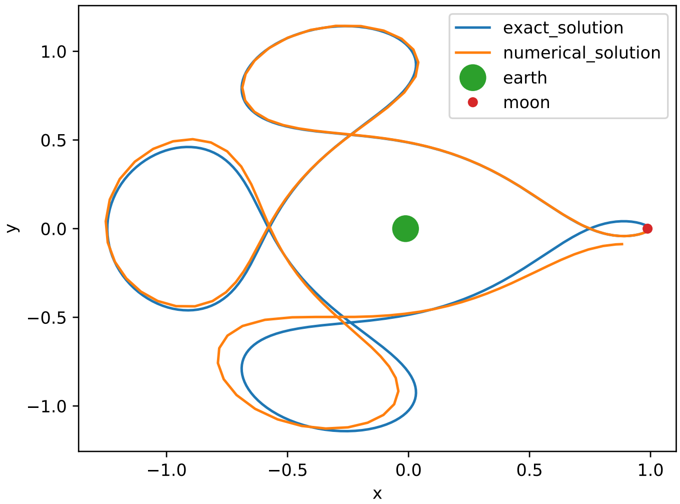
wobei N_1 und N_2 definiert sind durch

$$N_1 = \left((x + \mu_2)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}, \quad N_2 = \left((x - \mu_1)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

und $\mu_2 = 1 - \mu_1$. Der Mond befindet sich dabei im Punkt $(\mu_1, 0)$, die Erde im Punkt $(-\mu_2, 0)$. Mit den Anfangswerten

$$\begin{aligned} x(0) &= 0.994, & x'(0) &= 0 \\ y(0) &= 0, & y'(0) &= -2.0015851063790825 \end{aligned}$$

und dem Parameter $\mu_2 = 0.012277471$ hat das System eine periodische Lösung mit der Periodendauer $T = 17.06521656015796$. Die Berechnung solcher Arenstorf-Orbits ist sehr sensitiv gegenüber kleinen Störungen, deswegen sind sie beliebte Testbeispiele für die Genauigkeit numerischer Methoden.



Implementierung

1. Formen Sie das Problem in ein System erster Ordung mit vier Variablen um und implementieren Sie eine Modelklasse `ArenstorfOrbit` dafür. Als Beispiel kann das Modelproblem `Lorenz` aus `examples/num1/lorenz.hh` dienen.
2. Wenden Sie das klassische explizite Runge-Kutta vierter Ordnung (`RungeKutta4` aus *hdnum*) auf das Arenstorf-Orbit Problem an. Dabei soll die feste Zeitschrittweite h so gewählt werden, dass der Fehler in der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ zum Zeitpunkt $t = T$ kleiner als $2.42 \cdot 10^{-8}$ ist. Dabei soll der letzte Zeitschritt so gewählt sein, das tatsächlich $t = T$ gilt (er wird also i.A. kleiner als die anderen Zeitschritte sein).
3. Wie klein muss man h wählen? Wie oft wertet das Program die rechte Seite f aus?

Anmerkung: Auf der Vorlesungshomepage finden Sie ein python Skript mit dem Sie ihre Ergebnisse visualisieren können.

Schrittweitensteuerung
In der Vorlesung wurden zwei Algorithmen für die Schrittweitensteuerung vorgestellt - eigebettete Verfahren und und Richardson-Extrapolation. Wir werden im folgenden beide Verfahren verwenden.

4. Implementieren Sie das eingebettete dreistufige Runge-Kutta Verfahren RKF23:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \hline m=2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline m=3 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array}$$

   Sie können dafür analog zur bereits implementierten Klasse `RKF45` aus der Datei`src/ode.hh` vorgehen.

5. Das Richardson-Extrapolation Verfahren ist in *hdnum* bereits implementiert (Klasse `RE`). Kombinieren Sie dieses Verfahren mit `Heun2`.
6. Lösen Sie das Arenstorf-Obit Problem mit RKF23 und RE/Heun2 und stellen sie den Parameter TOL so ein, dass der Fehler zum Zeitpunkt $t = T$ kleiner als $2.42 \cdot 10^{-8}$ ist.

   Wie klein muss TOL gewählt werden und wiele viele Funktionsauswertungen von f sind nötig? Vergleichen Sie mit dem `RungeKutta4` Verfahren von oben.

7. Mit der Klasse `Timer` kann man die Laufzeit des Programms messen. Vergleichen Sie die benötigte Rechenzeit der drei Algorithmen, um diesselbe Genauigkeit zu erreichen. Erklären Sie ihre die Beobachtung.

   Vorsicht: Vermeiden Sie die Ausgabe von Daten zum Plotten wenn Sie Zeiten messen!

(10 Punkte)