Numerik (Sommersemester 2017) **Aufgabenblatt 5**

Prof. Dr. Peter Bastian, René Heß Abgabe 1. Juni 2017

IWR, Universität Heidelberg

Übung 1 *Harmonischer Oszillator*

Der Dynamik eines harmonischen Oszillators entspricht die AWA

$$u''(t) = -\omega^2 u(t), \qquad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}, \quad u'(t_0) = \tilde{u_0} \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \omega \neq 0.$$

1. Stellen Sie das äquivalente System erster Ordnung auf.
2. Zeigen Sie, das dieses Problem durch
$$q'(t) = -\omega i q(t), \qquad q(t_0) = q_0 \in \mathbb{C},\ \omega \in \mathbb{R}$$
auch als eine komplexwertige skalare AWA formuliert werden kann.
3. Überprüfen Sie, ob ein $h > 0$ existiert, so dass das explizite Euler Verfahren für dieses Problem absolut stabil ist, also die damit berechneten Näherungswerte y_n^h von $u(t_n)$ die Bedingung
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n^h| < \infty$$
erfüllen.

(5 Punkte)

Übung 2 *Autonomisierung*

Unter Autonomisierung einer AWA versteht man das Lösen des erweiterten Systems

$$\tilde{y}' = \tilde{f}(\tilde{y}) \text{ mit } \tilde{y} = \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}, \tilde{f}(\tilde{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,y) \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{y}(t_0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

welches offensichtlich äquivalent ist zum Problem

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Ein Einschrittverfahren heißt invariant gegen Autonomisierung, wenn die zu f bzw. $\tilde{f}$ gehörenden Verfahrensfunktionen F bzw. $\tilde{F}$ dieselben Ergebnisse produzieren, also

$$\tilde{F}(h, \tilde{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ F(t,y,h) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass ein (konsistentes) explizites Runge-Kutta Verfahren der Stufe s genau dann invariant gegen Autonomisierung ist, wenn gilt

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}, \quad (1 \leq i \leq s).$$

Hinweis: Für jedes konsistente Runge-Kutta Verfahren gilt $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$.

(5 Punkte)

Übung 3 *Schrittweitenkontrolle mit Richardson und Viertelung*

Rekapitulieren Sie die Richardson Extrapolation zur Schätzung von $\tau^m(t_n)$ aus der Vorlesung und beantworten Sie folgenden Fragen:

1. Wie lautet die Abschätzung, wenn statt einer Schrittweitenhalbierung eine Schrittweitenviertelung vorgenommen wird?

   Sie sollen also einen Schritt mit Schrittweite H mit vier Schritten der Schrittweite $H/4$ vergleichen.

2. Ist diese Methode auch für implizite Einschrittverfahren

$$y_n = y_{n-1} + h_n F(h_n; t_{n-1}, y_{n-1}^h, y_n^h)$$

   mit L-stetiger Verfahrensfunktion F anwendbar?

(5 Punkte)