Prof. Dr. Peter Bastian, René Heß Abgabe 8. Juni 2017
IWR, Universität Heidelberg

Übung 1 *Imaginäres Stabilitätsintervall*

Bestimmen Sie das rein imaginäre Stabilitätsintervall (der Schnitt der imaginären Achse mit dem Stabilitätsgebiet)

$$\{z = ai \in \mathbb{C} : \quad a \in \mathbb{R}, \quad |w(z)| \leq 1\}$$

für explizite Runge-Kutta Verfahren der Ordnung 1 bis 3 wobei Sie davon ausgehen dürfen, dass die Ordnung der Runge-Kutta Verfahren maximal ist.

(5 Punkte)

Übung 2 *Stabilitätsintervalle konkreter Einschrittverfahren*

Geben Sie die Stabilitätsintervalle der folgenden Einschrittverfahren an:

1. $y_n^h = y_{n-1}^h + \frac{1}{2}h\left(f(t_n, y_n^h) + f(t_{n-1}, y_{n-1}^h)\right)$
2. $y_n^h = y_{n-1}^h + hf(t_{n-1} + \frac{1}{2}h, y_{n-1}^h + \frac{1}{2}hf(t_{n-1}, y_{n-1}^h))$
3. $y_n^h = y_{n-1}^h + \frac{1}{6}h\left(2f(t_n, y_n^h) + 4f(t_{n-1}, y_{n-1}^h) + hf^{(1)}(t_{n-1}, y_{n-1}^h)\right), \quad f^{(1)} = f_t' + ff_x'$

(5 Punkte)

Übung 3 *Stabilitätsanalyse für allgemeine Systeme*

In dieser Aufgabe sollen Sie nachvollziehen warum es sinnvoll ist einen Großteil der Stabilitätsanalyse über das Modellproblem aus der Vorlesung aufzuziehen.

Gegeben seien die beiden Anfangswertaufgaben

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0,$$
$$v'(t) = f(t, v(t)), \quad t \geq t_*, \quad v(t_*) = u(t_*) + w_*$$

mit $u(t)$, $v(t) \in \mathbb{R}^d$.

1. Zeigen Sie, dass $w := v - u$ näherungsweise die Anfangswertaufgabe

   $$w'(t) = f_x(t, u(t))w(t), \quad t \geq t_*, \quad w(t_*) = w_*$$

   erfüllt, wobei f_x die Jakobi-Matrix von $f(t, x)$ bzgl x ist.

2. Für kleine Zeitintervalle kann man die Zeitabhängigkeit von f_x vernachlässigen und $A := f_x(t_*, u(t_*))$ definieren. Im folgenden sei vorausgesetzt, dass A diagonalisierbar ist ($A = Q^{-1}DQ$). Zeigen Sie dass die Anfangswertaufgabe

   $$w'(t) = Aw(t), \quad t \geq t_*, \quad w(t_*) = w_* \tag{1}$$

   äquivalent zu

   $$(z'(t))_i = \lambda_i(z(t))_i, \quad t \geq t_*, \quad z(t_*) = Qw_*, \quad i = 1, \dots, n \tag{2}$$

   ist, wobei λ_i die Eigenwerte von A sind.

   Dies entspricht gerade n Gleichunge der Form des skalaren linearen Modellproblems! Die diagonalisierbarkeit der Jakobi-Matrix ist essentiell für die Ausweitung der Modellproblemanalyse auf allgemeine Systeme.

3. Zeigen Sie, dass explizite Runge-Kutta Verfahren angwendet auf die Probleme (1) und (2) unter der Annahme exakter Arithmetik auf Näherungen w_n^h und z_n^h führen mit

$$z_n^h = Qw_n^h.$$

(5 Punkte)

Übung 4 *Simulation steifer Systeme*

Die 3-dimensionale, steife AWA

$$u' = Au(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = (1, 0, -1)^T,$$

mit der Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -21 & 19 & -20 \\ 19 & -21 & 20 \\ 40 & -40 & -40 \end{pmatrix}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-40t}\left\{\cos(40t) + \sin(40t)\right\}, \\ u_2(t) &= \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-40t}\left\{\cos(40t) + \sin(40t)\right\}, \\ u_3(t) &= -e^{-40t}\left\{\cos(40t) - \sin(40t)\right\}. \end{aligned}$$

Die Systemmatrix hat die Eigenwerte $-40 + 40i$, $-40 - 40i$ und -2. In dieser Aufgabe sollen Sie untersuchen inwiefern sich das auf die Schrittweiten impliziter und expliziter Verfahren auswirkt.

1. Implementieren Sie eine Modell-Klasse für dieses Problem.
2. Möchte man eine *linearer* AWA mithilfe der impliziten Trapezregel zweiter Ordnung

   $$y_n^h = y_{n-1}^h + \frac{h_n}{2}(f(t_{n-1}, y_{n-1}^h) + f(t_n, y_n^h))$$

   lösen so muss man in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem lösen. Stellen Sie das Gleichungssystem auf.
3. Schreiben sie eine Klasse zum lösen *linearer* AWA mithilfe der impliziten Trapezregel von oben. Verwenden Sie die in der *hdnum* Bibliothek bereit gestellten Methoden, um das auftretende LGS zu lösen (Beispiel: `hdnum/examples/num0/lr.cc`).
4. Lösen sie das Problem mit Richardson Schrittweitensteuerung und der impliziten Trapezregel bzw. dem expliziten Heun-Verfahren zweiter Ordnung. Stellen sie die Toleranz jeweils so ein, dass die euklidische Norm des Fehlers zum Zeitpunkt $T = 2$ kleiner als $1e - 10$ wird.

   Wie viele Zeitschritte werden dabei jeweils benötigt?

   Hinweis: Das Heun Verfahren und die Richardson Extrapolation sind unter den Namen `Heun2` *und* `RE` *bereits in der hdnum implementiert und dürfen verwendet werden.*

(5 Punkte)