
Übung 1 *θ-Verfahren*

Das elementare θ-Verfahren entspricht dem Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} \theta & \theta \\ \hline & 1 \end{array}$$

mit $\theta \in [0, 1]$.

1. Zeigen Sie, dass dieses Verfahren äquivalent ist zu der Vorschrift
$$y_n^h = y_{n-1}^h + hf(t_{n-1} + \theta h, y_{n-1}^h + \theta(y_n^h - y_{n-1}^h)).$$
2. Für welche Werte von θ ist das Verfahren A-stabil?
3. Für welche Werte von θ ist es L-Stabil?

(5 Punkte)

Übung 2 *SDIRK Verfahren*

1. Bestimmen Sie für das Alexander Verfahren, welches durch das Butcher Tableau
$$\begin{array}{c|cc} \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & (1-\alpha) & \alpha \\ \hline & 1-\alpha & \alpha \end{array}$$
gegeben ist, die Verfahrensfunktion $\omega(h\lambda)$ zum Modellproblem $u'(t) = \lambda u(t)$.
2. Zeigen Sie, dass das Verfahren für $\alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ das Modellproblem in zweiter Ordnung approximiert. Führen Sie hierzu einen Koeffizientenvergleich von $\omega(z)$ und e^z durch.
3. Zeigen Sie, dass das Verfahren für $\alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ A-stabil ist. (Hinweis: Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}^-$ anwenden.)
4. (Bonusaufgabe) Zeigen Sie, dass das Verfahren von Crouzieux mit dem Butcher-Tableau
$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$
A-stabil ist und das Modelproblem in dritter Ordnung approximiert. Die Ordnung eines s-stufigen impliziten Runge Kutta Verfahrens kann also höher als s sein.

(5+2 Punkte)

Übung 3 *Stabilität einer linearen AWA*

Jede in der Vorlesung betrachtete Einschrittmethode nimmt angewendet auf ein lineares (autonomes) System $u'(t) = Au(t)$ mit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ die Form $y_n = g(hA)y_{n-1}$ an, mit einer *rationalen* Funktion $g(\cdot) : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^{d\times d}$.

1. Zeigen Sie, dass für $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und reguläres $Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$ gilt:

$$g(QBQ^{-1}) = Qg(B)Q^{-1}$$

2. Sei A symmetrisch. Zeigen Sie, dass die Abschätzung

$$\|y_n\|_2 \leq \max_{1\leq i\leq d} |g(h\lambda_i)|^n \|y_0\|_2$$

gilt, wobei λ_i die Eigenwerte von A sind. Hinweis: Reell-symmetrische Matrizen besitzen ein Orthogonalsystem aus Eigenvektoren.

Anmerkung: Hier bildet g im Gegensatz zu vorher in andere Räume ab: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Gemeint ist natürlich die rationale Funktion mit denselben Koeffizienten aber anderem Definitions- und Wertebereich.

3. Bei örtlicher Diskretisierung der (1-dimensionalen) Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t v(x,t) = \partial_{xx} v(x,t), \quad v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad v(x,0) = v_0(x)$$

mittels zentralem Differenzenquotienten zweiter Ordnung (mit Gitter der Gitterweite Δx) entsteht ein System von $d = \frac{1}{\Delta x} - 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen in den Unbekannten $u_i(t) \approx v(x_i, t)$:

$$u_i'(t) = \frac{1}{\Delta x^2}\left[u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)\right], \quad i = 1,\ldots,d, \quad (u_0 = u_{d+1} = 0).$$

Die zugehörige Koeffizientenmatrix

$$A = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_j = \frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta x^2}\cos\left(\frac{\pi j}{n+1}\right), \quad j = 1\ldots d.$$

Bestimmen Sie die maximale Schrittweite h_{max} für welche das explizite Euler Verfahren das System noch stabil integriert.

(5 Punkte)

Übung 4 *DIRK Verfahren*

Zur Lösung der folgenden Aufgaben darf die generische Klasse `DIRK` verwendet werden, welche in der *hdnum* Bibliothek in der Datei `hdnum/src/ode.hh` implementiert ist. Eine Beispielanwendung auf den Van-der-Pol Oszillator ist in `hdnum/examples/num1/vanderpol.cc` gegeben.

Der Van-der-Pol Oszillator ist ein klassisches Beispiel für steife AWA. In den Koordinaten von Liénhart:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_2(t) & \qquad y_1(0) &= 1 \\ y_2'(t) &= \frac{1}{\varepsilon}(y_1(t) - y_2(t)^3/3 + y_2(t)) & \qquad y_2(0) &= 2. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon = 10^{-3}$ zeigt er ein periodisches Verhalten mit äußerst scharfen Umkehrpunkten. Eine Implementierung dieses Modells finden Sie ebenfalls in `hdnum/examples/num1/vanderpol.cc`.

1. Berechnen Sie $y_1(10)$ und $y_2(10)$ mit dem (impliziten) Alexander Verfahren und dem (expliziten) Verfahren von Heun (zweiter Ordnung). Verwenden Sie Schrittweiten $h = 10^{-1}$ bis $h = 10^{-4}$ und visualisieren sie die Lösungen.

   Wird das Alexander Verfahren mit Schrittweite $h = 10^{-1}$ gestartet wird offensichtlich keine konstante Schrittweite gewählt. Was passiert hier?

2. Lösen und visualisieren Sie das Problem außerdem mit dem adaptiven Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren, welches in der Löser-Klasse *RKF45* implementiert ist. Wählen Sie hier Werte $TOL = 10^{-1}$ bis $TOL = 10^{-4}$.

3. Beschreiben und Interpretieren Sie Ihre Beobachtungen und geben Sie diese in einer separaten Datei mit ab.

   Darstellung und Interpretation der Ergebnisse ist ein wesentlicher Bestandteil der Aufgabe. Sie dürfen gerne aussagekräftige Plots mit abgeben.

4. (Bonusaufgaben) Untersuchen die den Aufwand der numerischen Verfahren indem sie die Rechenzeiten miteinander vergleichen. Sie dürfen dafür T so wählen, dass Sie sinnvolle Zeiten messen können.

   Vermeiden Sie das herausschreiben der Lösungen wenn Sie Zeiten messen! Kompilieren Sie mit `-O3`.

(5+2 Punkte)