
Übung 1 *BDF 2 für nichtäqudistante Zeitschritte*

Die Koeffizienten der impliziten Rückwärtsdifferenzenformeln

$$\sum_{\mu=0}^{m} L'_{\mu,m}(t_n) y_{n-\mu} = f_n$$

ergeben sich direkt aus den Ableitungen der Lagrange-Polynome

$$L_{\mu,m}(t) = \prod_{l=0, l\neq\mu}^{m} \frac{t - t_{n-l}}{t_{n-\mu} - t_{n-l}}.$$

Geben Sie im Fall $m = 2$ die Koeffizienten in Abhängigkeit der beliebigen Schrittweiten $h_n = t_n - t_{n-1}$ und $h_{n-1} = t_{n-1} - t_{n-2}$ an. Zeigen Sie, dass dieses Verfahren für $h_n = h_{n-1}$ gerade das BDF 2 Verfahren darstellt.

(5 Punkte)

Übung 2 *LMM Ordnung und Nullstabilität*

Bestimmen Sie die größte erzielbare Ordnung für eine LMM der Form

$$y_n + \alpha(y_{n-1} - y_{n-2}) - y_{n-3} = \frac{3+\alpha}{2} h(f_{n-1} + f_{n-2}).$$

Für welche α ist diese Form nullstabil?

(5 Punkte)

Übung 3 *LMM nach Skeel*

Gegeben sei das lineare Mehrschrittverfahren

$$\alpha_k y_{j+k} + \cdots + \alpha_0 y_j = h\beta_k f_{j+k} + \cdots + h\beta_0 f_j$$

mit $f_l = f(t_l, y_l)$.

1. Zeigen Sie, dass zur Anwendung des Mehrschrittverfahrens die Speicherung des Vektors $s_j = (s_j^0, \ldots, s_j^{k-1})^T$ genügt, welcher rekursiv wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} s_j^{k-1} &= s_{j-1}^{k-2} + \alpha_{k-1} y_{j+k} - h\beta_{k-1} f_{j+k}, \\ &\vdots \\ s_j^1 &= s_{j-1}^0 + \alpha_1 y_{j+k} - h\beta_1 f_{j+k}, \\ s_j^0 &= \alpha_0 y_{j+k} - h\beta_0 f_{j+k} \end{aligned}$$

Hinweis: Betrachten Sie $s_j^k = s_{j-1}^{k-1} + \alpha_k y_{j+k} - h\beta_k f_{j+k} = 0$

2. Welchen Vorteil bietet diese Darstellung bei der Implementierung des linearen Mehrschrittverfahrens?

(5 Punkte)

Übung 4 *LMM Adams-Bashfort (praktische Übung)*

Für das Modellproblem

$$u'(t) = -200tu(t)^2, \quad t \geq -3, \quad u(-3) = \frac{1}{901},$$

mit der Lösung $u(t) = (1 + 100t^2)^{-1}$ soll näherungsweise der Wert $u(0) = 1$ berechnet werden. Implementieren Sie die Adams-Bashfort Methode vierter Ordnung

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{24}h(55f_{n-1} - 59f_{n-2} + 37f_{n-3} - 9f_{n-4}),$$

und verwenden sie ein Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung zur Berechnung der Startwerte.

Führen Sie die Rechnungen für äquidistante Schrittweiten $h_i = 2^{-i}$, $i = 2, \ldots, 8$ durch und betrachten sie den Fehler zur Zeit $t = 0$.

Zum Vergleich soll dasselbe Problem komplett mit dem Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung gerechnet werden. Wie verhält sich der Fehler zur Zeit $t = 0$ gegenüber der LMM? Vergleichen sie außerdem die Anzahl der Funktionsauswertungen für die Adams-Bashfort Methode und das Runge-Kutta Verfahren.

(5 Punkte)