
Übung 1 *LMM - Konvergenz - Schrittweite*

Zur Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = u(t)\ \cos(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1$$

soll das Adams-Moulton-Verfahren dritter Ordnung

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{12}h(5f_n + 8f_{n-1} - f_{n-2})$$

verwendet werden. Untersuchen Sie ob das Adams-Moulton Verfahren konvergent ist. Wie klein muss die Schrittweite h bemessen sein, damit die Konvergenz des Verfahrens sichergestellt ist?

(5 Punkte)

Übung 2 *LMM Stabilitätsintervalle*

Man bestimme die Stabilitätsintervalle der folgenden beiden expliziten Mehrschrittformeln:

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-2} &= 2hf_{n-1} \\ y_n - y_{n-2} &= \frac{1}{2}h(f_{n-1} + 3f_{n-2}). \end{aligned}$$

(5 Punkte)

Übung 3 *Prädiktor - Korrektor*

Gegeben sei eine explizite und eine implizite LMM:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{R} \alpha_{R-r}^{(P)} y_{n-r} &= h \sum_{r=1}^{R} \beta_{R-r}^{(P)} f_{n-r}, \\ \sum_{r=0}^{R} \alpha_{R-r}^{(K)} y_{n-r} &= h \sum_{r=0}^{R} \beta_{R-r}^{(K)} f_{n-r}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Ordnung m des zugehörigen Prädiktor-Korrektor Verfahrens in der $\mathrm{P}(EC)^k\mathrm{E}$-Form gleich $m = \min(m^{(C)}, m^{(P)} + k)$ ist.

Hinweise:

- *Betrachten Sie die Berechnung von y_n bei exakten Startwerten y_{n-r}, $r = 1, \ldots, R$.*
- *Für die Fixpunktiteration des Korrektors zum Startwert $y_n^{(0)}$ zur Bestimmung von y_n dürfen Sie die Abschätzung*

  $$\|y_n^{(k)} - y_n\| \leq q^k \|y_n^{(0)} - y_n\|$$

  mit $q = hL|\beta_R|$ verwenden. (Wir gehen von einer AWA aus, die die Lipschitz-Bedingung erfüllt.)

(5 Punkte)

Übung 4 *Schießverfahren (praktische Übung)*

In dieser Aufgabe implementieren Sie das Schießverfahren für skalare Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form

$$\begin{aligned} u''(t) &= f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in [a, b] \\ u(a) &= u_a \\ u(b) &= u_b. \end{aligned}$$

Auf der Homepage finden Sie die Dateien `rwa_schiessverfahren.cc` und `single_shooting.hh`. Dort befindet sich bereits ein Grundgerüst für diese Übung bei dem aber noch die wesentlichen Bestandteile fehlen.

In der Datei `rwa_schiessverfahren.cc` sind die folgenden Klassen implementiert:

- `SecondOrderODE`: Implementierung der skalaren Differentialgleichung zweiter Ordnung.
- `Model`: Implementierung der AWA deren Lösung $y(t, s)$ die zum Aufstellen der nichtlinearer Gleichung $F_N(s) := y_1(b, s) - u_b$ benötigt wird.
- `DerivativeModel`: Implementierung der AWA deren Lösung $\frac{\partial y}{\partial s}$ zum Berechnen des Updates im Newton Verfahren benötigt wird.

1. Vervollständigen Sie die Implementierung der Klasse `SecondOrderODE` sodass die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u''(t) &= \sin(t)\, u(t) - 4u'(t) - \cos(t), \quad t \in [0, \pi] \\ u(a) &= 0.124 \\ u(b) &= 0.124 \end{aligned}$$

   gelöst wird.
2. Machen Sie sich mit der Implementierung der Klassen `Model` und `DerivativeModel` vertraut. Achten Sie dabei auf die Methoden `set_s` und `set_y`.
3. Implementieren Sie das einfache Schießverfahren in der Datei `single_shooting.hh`. Plotten Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe für den Parameter s den Sie als Ergebnis des einfachen Schießverfahrens erhalten.

(5 Punkte)