Numerik (Sommersemester 2017) **Aufgabenblatt 11**

Prof. Dr. Peter Bastian, René Heß Abgabe 13. Juli 2017

IWR, Universität Heidelberg

Übung 1 *Einspringende Ecke*

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung in Polarkoordinaten

$$\Delta u(r, \varphi) = 0$$

in $\Omega = \{(r, \varphi)^T | 0 < r < 1, 0 < \varphi < \Phi\}$.

1. Verifizieren Sie, dass $\tilde{u}(r, \varphi) = r^k \sin(k\varphi)$ eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung darstellt.
2. Sei $\Phi = \frac{3}{2}\pi$ und $k = \frac{\pi}{\Phi}$. Welche Werte nimmt u auf dem Rand von Ω an? Gegen welchen Wert strebt die Ableitung $\partial_r u(r, \varphi)$ für $(r \to 0)$?
3. Was könnte eine physikalische Interpretation dieses Verhaltens sein?

Hinweis: In Polarkoordinaten gilt $\Delta u = \partial_r^2 u + \frac{1}{r}\partial_r u + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 u.$

(5 Punkte)

Übung 2 *Typeneinteilung*

Bestimmen Sie den Typ (elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch) der folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Abhängigkeit von x und y:

1. $x\partial_{xx}u + 2y\partial_{xy} + y^2\partial_{yy}u + \partial_x u - u = 0$
2. $\partial_{tt}u + (1 - x^2)\partial_{xx}u + (1 - y^2)\partial_{yy}u - xy\partial_x u = \sin(x\pi)\sin(y\pi)$

(5 Punkte)

Übung 3 *Radialsymmetrische Harmonische Funktionen*

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ eine harmonische und radialsymmetrische Funktion mit $u(x) = v(r(x))$. Hierbei ist $r : \Omega \to \mathbb{R}$ der Abstand vom Ursprung $r(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$ und $\Gamma = r(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-d}{r} \qquad \forall r \in \Gamma,$$

gilt, falls $v'(r(x)) \neq 0 \; \forall x \in \Omega$.

(5 Punkte)

Übung 4 *Elliptische Probleme (praktische Übung,* ***Bearbeitungszeit 2 Wochen****)*

Die partielle Differentialgleichung

$$-\nabla \left(k(x)\nabla u(x)\right) = q(x) \quad \forall x \in \Omega$$

mit $k \in C^1(\bar{\Omega})$ beschreibt ein elliptisches Problem auf einem beschränkten, offenen Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^2$. In einem einfachen Diskretisierungs-Ansatz, werden die Ableitungen unter Anwendung eines Differenzen-Verfahrens diskretisiert. Hierzu definiert man für gegebenes $h \in \mathbb{R}^2$ die Punktmenge

$$\mathcal{T} = \{x := \sum_{j=1}^{2} e_j \, h_j \, \alpha_j \;\big|\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z} \wedge x \in \Omega\}.$$

Da die Anzahl der Gitterpunkte $N := |\mathcal{T}|$ endlich ist, existiert eine Folge $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$ mit $\mathcal{T} = \{x_i \mid i = 1 \ldots N\}$ und man löst die Gleichungen

$$\Gamma_i := -\sum_{j=1}^{d} \frac{1}{h_j^2} \left(k_{i,j}^{+} \left(\tilde{u}(x_i + h_j) - \tilde{u}(x_i)\right) - k_{i,j}^{-} \left(\tilde{u}(x_i) - \tilde{u}(x_i - h_j)\right) \right) - q(x_i) = 0, \qquad \forall i \in 1, \ldots, N. \tag{1}$$

wobei

$$\begin{aligned} k_{i,j}^{+} &:= \frac{1}{2}(k(x_i + h_j) + k(x_i)), \\ k_{i,j}^{-} &:= \frac{1}{2}(k(x_i) + k(x_i - h_j)), \end{aligned}$$

und $\tilde{u}$ eine Gitterfunktion bezeichnet, welche nur in den Punkten von $\mathcal{T}$ definiert ist. Mit $U \in \mathbb{R}^N$ und $(U)_i := \tilde{u}(x_i)$ können wir durch $(F(U))_i := \Gamma_i$ die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definieren und das diskrete Problem aus Gleichung (1) kann als

$$F(U) = 0 \tag{2}$$

geschrieben werden. Diese lineare algebraische Gleichung kann z.B. durch einen Schritt des Newton-Verfahrens gelöst werden (was genau das ist, das in der Implementierung letztlich geschieht).

Die Datei *hdnum/src/pde.hh* enthält die Implementierung einer stationnären Löserklasse, welche dazu gedacht ist, Gleichungen vom Typ 2 zu lösen. Eine Beispiel-Implementierung des zur Laplace Gleichung $\Delta u = 0$ gehörenden Modellproblem findet man in *hdnum/examples/num1/laplace.hh*. Eine kommentierte Beispielanwendung befindet sich in *hdnum/examples/num1/ecke.cc*. Die dort geschriebenen Gnuplot Dateien, können Sie einfach durch den Befehl `gnuplot dateiname.gp` betrachten. Zum genauen Verständnis des Codes kann auch ein Blick in die Datei *hdnum/src/sgrid.hh* hilfreich sein, in welcher eine Helfer-Klasse für das Gitter $\mathcal{T}$ implementiert ist.

1. Machen Sie sich mit dem Beispiel in *hdnum/num1/examples/ecke.cc* und der Implementierung in *hdnum/num1/examples/laplace.hh* vertraut. Letztere erlaubt die Anwendung von Neumann sowie von Dirichlet Rändern. Die Gleichung 1 (mit $k(x) = 1$, $q(x) = 0$) wird dabei nur für Punkte innerhalb des Gitters verwendet und für Punkte auf dem Gitterrand modifiziert. Geben Sie die Gleichungen an, welche von der Implementierung (jeweils für Dirichlet bzw. Neumann Knoten) in diesen Punkten gelöst werden.

2. Implementieren Sie die partielle Differentialgleichung

$$-\Delta u = 0$$

in $\Omega = \{(x,y)^T | r_1 < \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} < r_2\}$ mit

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u_1, \quad \text{wenn } (x,y)^T \in \Gamma_1 := \{(x,y)^T | r_1 = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}\}, \\ u(x,y) &= u_2, \quad \text{wenn } (x,y)^T \in \Gamma_2 := \{(x,y)^T | r_2 = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}\} \end{aligned}$$

und Parametern $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $u_1 = 1$ und $u_2 = \frac{3}{2}$.

Hierzu können Sie noch die Laplace-Modellklasse verwenden und müssen nur alternative Implementierungen der `DomainFunction` und der `BoundaryFunction` bereit stellen. Visualisieren Sie Ihr Ergebnis.

Ermitteln Sie die Konvergenzrate in einem Punkt $x \in \Omega_h$ für kleiner werdende Gitterweite h durch Vergleich mit der exakten Lösung

$$u(x,y) = \frac{u_1 - u_2}{\ln(r_1) - \ln(r_2)}(\ln(\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}) - \ln(r_1)) + u_1.$$

Dafür müssen Sie sicherstellen, dass x tatsächlich für alle h in Ω_h liegt.

3. Implementieren Sie eine eigene Modellklasse, welche der Gleichung 1 bzw. 2 entspricht. Die Laplace-Modellklasse kann hier als Ausgangspunkt verwendet werden. Lösen Sie mit Hilfe dieser Implementierung das folgende Beispielproblem:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \le x \le 2 \wedge 0 \le y \le 2\},$$

$$k(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \le 1 \\ 100 & \text{sonst }, \end{cases}$$

$$q(x,y) = \begin{cases} 100 & \text{wenn } \left\|(x,y)^T - (1,1)^T\right\|_2 \le 0.15 \\ 0 & \text{sonst }, \end{cases}$$

$$u(x,y) = 0, \qquad (x,y)^T \in \partial\Omega \ \ \wedge \ \ x > 1, \qquad \text{Dirichlet Rand}$$

$$k(x,y)\nabla u(x,y) = (3,0)^T, \qquad (x,y)^T \in \partial\Omega \ \ \wedge \ \ x \le 1, \qquad \text{Neumann Rand}$$

Überlegen Sie sich ein physikalisches System welches von diesem Beispiel beschrieben wird. Erklären Sie anhand dieses Problems, das Verhalten der Lösung qualitativ.

(10 Punkte)