Prof. Dr. Peter Bastian, René Heß

IWR, Universität Heidelberg

Abgabe : Keine Abgabe

Hinweise zur Klausur:

- Die Klausur findet am Donnerstag den 27.Juli von 14 bis 16 Uhr im Hörsaal 1 des Gebäudes INF 227 statt. Erscheinen Sie bitte 10 Minuten vor Klausurbeginn, damit wir pünktlich um 14 Uhr starten können.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Bitte bringen Sie Ihren Ausweis oder Studentenausweis zur Klausur mit.
- Eine explizite Anmeldung zur Klausur ist nicht nötig. Wenn Sie die Kriterien zur Klausurzulassung erfüllen werden Sie automatisch angemeldet im Sinne der Prüfungsordnung. Es wird noch eine Infomail folgen, sobald klar ist wer zugelassen ist.
- Wer **nicht** an der Klausur teilnehmen möchte muss sich also abmelden! (Nach der Infomail.)
- Sie dürfen ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4 Blatt mitbringen (Kopien sind nicht zulässig).
- Es wird genug Schmierpapier zur Verfügung gestellt.
- Bei Bedarf wird eine Nachklausur angeboten. An dieser dürfen Sie nur teilnehmen wenn Sie durch die erste Klausur durchgefallen oder entschuldigt fehlen.
- Termin der Nachklausur ist der 12. Oktober um 12:30 Uhr. Die Klausur wird im Hörsaal der Kopfklinik stattfinden. Vor der Nachklausur wird es noch eine Infomail mit einer besseren Wegbeschreibung geben.

Übung 1 *Wiederholung für Klausur: Geben Sie möglichst kurze Antworten auf die folgenden Fragen:*

Sei durch $u'(t) = f(u(t), t),\ t \geq t_0,\ u(t_0) = u_0$ mit $f : D \to \mathbb{R}^d$ und $D \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ eine AWA gegeben.

1. Sei speziell $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ und f stetig. Was besagt der Satz von Peano über die Lösung der AWA. Welche weitere Bedingung an die lokalen Lösungen (aus Peano) ist für die Existenz einer globalen Lösung hinreichend? Welche weitere Bedingung f ist für die Existenz einer globalen Lösung hinreichend?
2. Sei speziell $d = 1$ und $f(x, t) = f(x) = x^2$, $t_0 = 0$, $u_0 = 1$. Wie lautet dann die Lösung der AWA?
3. Sind Lösungen linearer AWA mit stetigen Koeffizienten eindeutig?
4. Was ist der Abschneidefehler einer Einschrittmethode und wann heißt die Einschrittmethode konsistent mit der AWA?
5. Wann nennt man eine AWA *steif*?
6. Erläutern Sie die Idee des Taylor-Verfahrens und seinen wesentlichsten Nachteil bei der Integration mit hoher Konsistenzordnung.
7. Was ist ein Butcher-Tableau? Welche Bedeutung haben seine Diagonaleinträge? Kann jedes Einschrittverfahren durch ein Butcher-Tableau dargestellt werden?
8. In der Vorlesung haben sie zwei verschiedene Verfahren zur Schrittweitensteuerung kennen gelernt. Skizzieren Sie grob die Ideen der beiden Verfahren, sowie ihre Vor- und Nachteile.
9. Was bedeuten für eine Differenzenformel die Bezeichnungen A-stabil, $A(\alpha)$-stabil und L-stabil?
10. Was ist ein DIRK Verfahren?

11. Was ist die *Padé-Approximation* und wie wird sie motiviert?
12. Was ist der wesentliche Unterschied in der Stabilitätsanalyse von Ein- und Mehrschrittmethoden? Was ist Nullstabilität?
13. Was besagt die Ordnungsbarriere von Dahlquist?
14. Was ist die Idee des Prädiktor-Korrektor Verfahrens?
15. Welchen Typ hat die Wellengleichung?
16. Die Matrix A erfülle die für eine M-Matrix notwendige Vorzeichen-Eigenschaft. Zählen Sie alle Ihnen bekannten Möglichkeiten auf, um zu überprüfen, ob A wirklich eine M-Matrix ist.

(keine Punkte)

Übung 2 *Lobatto Regel*

Gegeben sei das Butcher Tableau zu der Lobatto Regel vierter Ordnung:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

1. Wie viele Stufen hat dieses Verfahren?
2. Wie viele (eventuell) nicht lineare Gleichungssysteme müssen in einem Schritt gelöst werden?
3. Überprüfen Sie, ob $z = 1 (= h \cdot \lambda)$ noch im Stabilitätsgebiet des Verfahrens liegt.

(keine Punkte)

Übung 3 *Laplace und Finite Differenzen*

Die Laplace-Gleichung soll durch Finite Differenzen auf dem Einheitsquadrat ($\Omega = (0,1) \times (0,1)$) gelöst werden.

1. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die aus dem 5-Punkt Stern resultierende System-Matrix L_h invertierbar ist, wenn ausschließlich Dirichlet-Randbedingungen verwendet werden, da dann die Null weder in den Gerschgorin-Kreisen von L_h, noch in dem Durchschnitt ihrer Ränder enthalten ist. Zeigen Sie, dass die Null im Rand der Gerschgorin Kreise enthalten ist, wenn auch Neumann Randbedingungen verwendet werden.
2. Als Diskretisierungsgitter soll ein Gitter mit 3×3 Zellen verwendet werden. Angenommen es werden ausschließlich Dirichlet Randbedingungen verwendet. In wie vielen Gitterpunkten ist der Wert der Lösung dann noch zu bestimmen. Von welchen Randwerten hängen dies (rein algebraisch) ab. Warum widerspricht das nicht wirklich der Aussage, dass bei elliptischen Problemen der Wert der Lösung in jedem Punkt von allen Randwerten abhängt?
3. Als Diskretisierungsgitter soll ein Gitter mit 2×2 Zellen verwendet werden. Stellen Sie die Systemmatrix L_h auf, unter der Annahme, das ausschließlich Neumann-Randbedingungen verwendet werden.
4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und sei die Vorzeichenbedingung für M-Matrizen erfüllt. Es gelte

$$\sum_{j \neq i, j \in I} |(A)_{ij}| = |(A)_{ii}| \quad \forall i \in I.$$

   Zeigen Sie, dass A singulär ist.

5. Als Diskretisierungsgitter soll ein Gitter mit 4×4 Zellen verwendet werden. Stellen Sie die Systemmatrix L_h auf, unter der Annahme, das ausschließlich periodische Randbedingungen verwendet werden. Ist das Problem eindeutig lösbar?

(keine Punkte)