Umgang mit negativen Zahlen

In der Mathematik ist das Vorzeichen eine separate Information welche 1 Bit zur Darstellung benötigt.

Im Rechner wird bei ganzen Zahlen zur Basis $\beta = 2$ eine andere Darstellung gewählt, die Zweierkomplementdarstellung.

Früher war auch das Einerkomplement gebräuchlich.

Einer- und Zweierkomplement

Definition: Sei $(a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0)_2$ die Binärdarstellung von $a \in [0, 2^n - 1]$. Dann heisst

$$e_n(a) = e_n((a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0)_2) = (\bar{a}_{n-1}\bar{a}_{n-2}\dots \bar{a}_1\bar{a}_0)_2$$

das Einerkomplement von a, wobei $\bar{a}_i = 1 - a_i$.

Definition: Sei $a \in [0, 2^n - 1]$. Dann heisst

$$z_n(a) = 2^n - a$$

das Zweierkomplement von a.

Es gilt: $e_n(e_n(a)) = a$ und $z_n(z_n(a)) = a$!

Das Zweierkomplement einer Zahl kann sehr einfach und effizient berechnet werden.

Sei $a \in [0, 2^n - 1]$. Dann folgt aus der Identität

$$a + e_n(a) = 2^n - 1$$

die Formel

$$z_n(a) = 2^n - a = e_n(a) + 1.$$

Somit wird keine Subtraktion benötigt sondern es genügt das Einerkomplement und eine Addition von 1. (Und das kann noch weiter vereinfacht werden).

Definition: Die Zweierkomplementdarstellung einer Zahl ist eine bijektive Abbildung

$$d_n : [-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1] \to [0, 2^n - 1]$$

welche definiert ist als

$$d_n(a) = \begin{cases} a & 0 \leq a < 2^{n-1} \\ 2^n - |a| & -2^{n-1} \leq a < 0 \end{cases} .$$

Die negativen Zahlen $[-2^{n-1}, -1]$ werden damit auf den Bereich $[2^{n-1}, 2^n - 1]$ positiver Zahlen abgebildet.

Sei $d_n(a) = (x_{n-1}x_{n-2} \ldots x_1x_0)_2$ dann ist a positiv falls $x_{n-1} = 0$ und a negativ falls $x_{n-1} = 1$.

Es gilt $d_n(-1) = 2^n - 1 = (1, \ldots, 1)_2$ und $d_n(-2^{n-1}) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2 - 1) = 2^{n-1} = (1, 0, \ldots, 0)_2$.

Operationen mit der Zweierkomplementdarstellung

Die Ein-/Ausgabe von ganzen Zahlen erfolgt (1) im Zehnersystem und (2) mittels separatem Vorzeichen.

Bei der Eingabe einer ganzen Zahl wird diese in das Zweier komplement umgewandelt:

- Lese Betrag und Vorzeichen ein und teste auf erlaubten Bereich
- Wandle Betrag in das Zweiersystem
- Für negative Zahlen berechne das Zweierkomplement

Bei der Ausgabe gehe umgekehrt vor.

Im folgenden benötigen wir noch eine weitere Operation.

Definition: Sei $x = (x_{m-1}x_{m-2}\ldots x_1x_0)_2$ eine m-stellige Binärzahl. Dann ist

$$s_n((x_{m-1}x_{m-2}\ldots x_1x_0)_2) = \begin{cases} (x_{m-1}x_{m-2}\ldots x_1x_0)_2 & m \leq n \\ (x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x_0)_2 & m > n \end{cases}$$

die Beschneidung auf n-stellige Binärzahlen.

Die Addition von Zahlen in der Zweierkomplementdarstellung gelingt mit

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a, b, a+b \in [-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$. Dann gilt

$$d_n(a+b) = s_n(d_n(a) + d_n(b)).$$

Es genügt eine einfache Addition. Beachtung der Vorzeichen entfällt!

Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle (mittlerer Fall steht für 2).

$\underline{a, b \geq 0.}$ Damit ist auch $a + b \geq 0$. Also

$$s_n(d_n(a) + d_n(b)) = s_n(a + b) = a + b = d_n(a + b).$$

$\underline{a < 0, b \geq 0.}$ $a + b$ kann positiv oder negativ sein. Mit $a = -|a|$:

$$\begin{aligned} s_n(d_n(a) + d_n(b)) &= s_n(2^n - |a| + b) = s_n(2^n + (a + b)) \\ &= \begin{cases} a + b & 0 \leq a + b < 2^{n-1} \\ 2^n - |a + b| & -2^{n-1} \leq a + b < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

$\underline{a, b < 0.}$ Damit ist auch $a + b < 0$ und $2^n - |a + b| < 2^n$:

$$\begin{aligned} s_n(d_n(a) + d_n(b)) &= s_n(2^n - |a| + 2^n - |b|) = s_n(2^n + 2^n + a + b) \\ &= s_n(2^n + 2^n - |a + b|) = 2^n - |a + b|. \end{aligned}$$

Beispiel: (Zweierkomplement) Für $n = 3$ setze

$$\begin{array}{lclclcl} 0 & = & 000 & \text{-1} & = & 111 \\ 1 & = & 001 & \text{-2} & = & 110 \\ 2 & = & 010 & \text{-3} & = & 101 \\ 3 & = & 011 & \text{-4} & = & 100 \end{array}$$

Solange der Zahlenbereich nicht verlassen wird, klappt die normale Arithmetik ohne Beachtung des Vorzeichens:

$$\begin{array}{rcr} 3 & \to & 011 \\ \text{-1} & \to & 111 \\ \hline 2 & \to & [1]010 \end{array}$$

Die Negation einer Zahl in Zweierkomplementdarstellung.

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in [-2^{n-1}+1, 2^{n-1}-1]$. Dann gilt

$$d_n(-a) = s_n(2^n - d_n(a)) = e_n(d_n(a)) + 1.$$

Beweis.

$\underline{a = 0.}$ $d_n(-0) = d_n(0) = s_n(2^n - d_n(0))$. Nur dieser Fall braucht die Anwendung von s_n.

$\underline{0 < a < 2^{n-1}.}$ Also is $-a < 0$ und somit

$$d_n(-a) = 2^n - |a| = 2^n - a = 2^n - d_n(a) = s_n(2^n - d_n(a)).$$

$\underline{-2^{n-1} < a < 0.}$ Also ist $-a > 0$ und somit

$$d_n(-a) = d_n(|a|) = |a| = 2^n - (2^n - |a|) = 2^n - d_n(a) = s_n(2^n - d_n(a)).$$

Schließlich behandeln wir noch die Subtraktion.

Diese wird auf die Addition zurückgeführt:

$$\begin{aligned}
d_n(a-b) &= d_n(a+(-b)) && a-b = a+(-b) \\
&= s_n(d_n(a)+d_n(-b)) && \text{Satz über Addition} \\
&= s_n(d_n(a)+s_n(2^n-d_n(b))) && \text{Satz über Negation.}
\end{aligned}$$

Natürlich vorausgesetzt, dass alles im erlaubten Bereich ist.