Einführung in die Numerik (Sommersemester 2011) — Aufgabenblatt 4
Dr. Olaf Ippisch / Adrian Ngo — Abgabe 20. Mai 2011, 9:15 Uhr
IWR, Universität Heidelberg

Übung 1 *Positiv-definite Matrizen*

Sehr häufig wird im Zusammenhang mit positiv-definiten Matrizen die Symmetrie vorausgesetzt. Doch positiv-definite Matrizen müssen nicht zwangsläufig symmetrisch sein!

a) Zeige, dass $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann positiv definit ist, wenn der symmetrische Anteil

$$A_S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$$

positiv definit ist.

b) Gegeben ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -(1+\alpha) & 2 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von α ist A positiv definit?

c) Zeige: Sei $H \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ und $A = \bar{H}^T H$. Dann gilt A ist positiv definit genau dann wenn $\mathrm{Rang}(H) = n$.

d) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definite Matrix und $X \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mit $m \geq n$ und $\mathrm{Rang}(X) = n$. Zeige, dass dann $B = X^T A X$ positiv definit.

(6 Punkte)

Übung 2 *Raleigh-Quotienten*

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine positive definite Matrix. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei A ferner symmetrisch. Der **Raleigh-Quotient** eines Vektors $x \in \mathbb{K}^n$ zur Matrix A ist definiert als

$$R_A(x) = \frac{x^T\, A\, x}{x^T\, x}\ .$$

a) Zeige folgende Beziehungen zwischen dem Raleigh-Quotienten und dem größten bzw. kleinsten Eigenwert von A:

$$\sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} R_A(x) = \lambda_{\max}(A) = \max\{\lambda \,|\, \lambda \text{ ist Eigenwert von A}\}$$

$$\inf_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} R_A(x) = \lambda_{\min}(A) = \min\{\lambda \,|\, \lambda \text{ ist Eigenwert von A}\}\ .$$

b) Zeige, dass sich die Kondition einer symmetrisch positiv definiten Matrix A (in der Spektralnorm) in folgender Weise durch den größten und kleinsten Eigenwert von A beschreiben lässt:

$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$$

(2 Punkte)

Übung 3 *Eine spezielle Tridiagonalmatrix*
Gegeben sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ von folgender Form:

$$T = \begin{pmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{pmatrix}.$$

mit $bc > 0$.

(a) Zeige: T besitzt für $k = 1, ..., n$ die Eigenwerte

$$\lambda_k = a + 2\, b\, \nu \cos(\frac{k\pi}{n+1})$$

mit den Eigenvektoren

$$v_k = \left(\nu \sin(\frac{k\pi}{n+1}), \nu^2 \sin(2\frac{k\pi}{n+1}), \cdots, \nu^n \sin(n\frac{k\pi}{n+1})\right)^T.$$

wobei $\nu = \sqrt{\frac{c}{b}}$ ist.

Nützliche Hilfe: Es gilt für $l, x \in \mathbb{R}$ die Formel:

$$2\cos(x)\sin(lx) = \sin((l+1)x) + \sin((l-1)x)$$

(b) Berechne für $a = 2$ und $b = c = -1$ die Kondition $\mathrm{cond}_2(T)$. Wie verhält sie sich für $n \longrightarrow \infty$?

(5 Punkte)

Übung 4 *Vorwärts- und Rückwärtssubstitution (Praktische Übung)*

Version 0.22 der *Heidelberg Educational Numerics Library (HDNUM)* enthält nun zwei weitere Funktionen, mit denen man eine Matrix bzw. einen Vektor über eine Textdatei einlesen kann:

```
void readMatrixFromFile (const std::string &filename, DenseMatrix< REAL > &A)
void readVectorFromFile (const std::string &filename, Vector< REAL > &A)
```

Lade diese Version herunter und packe sie aus. Mit dem Befehl

`firefox hdnum/doc/html/annotated.html &`

kann man sich die Klassendokumentation anschauen. Sie enthalten viele Beispiele.
In dieser Übung sollen die beiden Dreiecksmatrizen L und R aus den Dateien `matrixL.dat` und `matrixR.dat` sowie der Vektor b aus der Datei `vectorb.dat` gelesen werden. Diese Dateien befinden sich auf der Vorlesungs-Webseite.

Anschliessend soll die Gleichung

$$L \cdot x = b$$

durch Vorwärtssubstitution

For $i = 0, ..., n-1$
  $x_i = b_i$
  For $j = 0, ..., i-1$
    $x_i = x_i - L_{ij} \cdot x_j$

sowie die Gleichung

$$R \cdot y = b$$

durch Rückwärtssubstitution

For $i = n-1, ..., 0$
  $y_i = b_i$
  For $j = n-1, ..., i+1$
    $y_i = y_i - R_{ij} \cdot y_j$
  $y_i = y_i / R_{ii}$

gelöst werden. Berechne anschliessend die euklidischen Normen von $\|Lx - b\|_2$ und $\|Ry - b\|_2$.

Schreibe dafür zwei neue Headerdateien `solveL.hh` und `solveR.hh`, die im Hauptprogramm `simpleSolvers.cc` inkludiert werden sollen:

`solveL.hh` soll die Funktion

```
template<class T>
void solveL ( const hdnum::DenseMatrix<T>& A,
              hdnum::Vector<T>& x,
              const hdnum::Vector<T>& b )
{
  ...
}
```

enthalten und

`solveR.hh` soll die Funktion

```
template<class T>
void solveR ( const hdnum::DenseMatrix<T>& A,
              hdnum::Vector<T>& x,
              const hdnum::Vector<T>& b )
{
  ...
}
```

enthalten.

(5 Punkte)