Übung 1 *Strikt diagonaldominante Matrizen*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine *strikt diagonaldominante* Matrix, d.h. für ihre Einträge gelte:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i = 1...n$$

(a) Zeige: A ist regulär.

(b) Die Gauß-Elimination *ohne Zeilenvertauschung* zur Lösung des Systems $Ax = b$ ($b \in \mathbb{R}$) führt die Matrix $A^{(1)} := A$ mittels Multiplikation von links

$$A^{(k+1)} := G^{(k)} A^{(k)} \qquad (k = 1, ..., n-1)$$

mit den Eliminationsmatrizen

$$G^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & g_{k+1,k} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & g_{n,k} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g_{ik} := -a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}, \qquad (i = k+1, ..., n)$$

in die obere Dreiecksmatrix $A^{(n)}$ über.

Zeige:

Die Gauß-Elimination *ohne Zeilenvertauschung* ist möglich und die dadurch berechneten Matrizen $A^{(k+1)}$ ($k = 1, ..., n-1$) sind auch alle *strikt diagonaldominant*.

(6 Punkte)

Übung 2 *Gauss-Elimination und Zeilenvertauschung*
Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(a) Berechne die Kondition von A in der Spektralnorm.

(b) Berechne die echte Lösung von $Ax = b$ mit $b = (1, 0)^T$.

(c) Berechne die Lösung numerisch mittels Gauss-Elimination *ohne* Zeilenvertauschung.

(d) Berechne die Lösung numerisch mittels Gauss-Elimination *mit* Zeilenvertauschung.

Bei den numerischen Berechnungen nehmen wir an, dass wir eine Maschinengenauigkeit von 10^{-16} hätten.

(4 Punkte)

Übung 3 *Zeilenäquilibrierung*

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *zeilenäquilibriert*, wenn die Zeilensumme $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ identisch ist.

(a) Zeige: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei regulär. Dann existiert eine reguläre Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass die Matrix $D \cdot A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zeilenäquilibriert ist.

(b) Zeige: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bereits zeilenäquilibriert und ist $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ irgendeine reguläre Diagonalmatrix, so gilt:

$$\mathrm{cond}_\infty(\tilde{D}A) \geq \mathrm{cond}_\infty(A)$$

(4 Punkte)

Übung 4 *Gauß-Elimination (Praktische Übung)*

Schreibe eine neue Headerdatei `gauss.hh`, die die Template-Funktion

```
template<typename NUMBER>
void gauss( hdnum::DenseMatrix<NUMBER> A,    // Input A
            hdnum::Vector<NUMBER>& x,        // Output x
            hdnum::Vector<NUMBER> b          // Input b
            ){
              ...
            }
```

zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$) nach dem Eliminationsverfahren von Gauß *mit* Spaltenpivotsuche und Zeilenvertauschung enthält.
Diese Headerdatei wird benötigt, damit das Hauptprogramm `gaussmain.cc` (siehe Webseite der Vorlesung) kompiliert werden kann und das dort aufgeführte Gleichungssystem $Ax = b$ nach x gelöst werden kann.
Kompiliere das Programm für die beiden Datentypen `double` und `float` und überprüfe, wie groß jeweils die Dimension n maximal sein darf, damit das Programm für das dort aufgeführte Gleichungssystem noch eine richtige Lösung liefert.

(5 Punkte)