**Übung 1** *Rückwärtsanalyse des Lösens eines Dreiecksystems*

Es seien $\hat{x}$ bzw. $\hat{y}$ die numerischen Lösungen des unteren bzw. oberen Dreieckssystems $Lx = b$ und $Ry = c$ mit $L, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt:

$$(L+F)\hat{x} = b \qquad |F| \le n \text{ eps } |L| + O(\text{eps}^2) \tag{1}$$

$$(R+G)\hat{y} = c \qquad |G| \le n \text{ eps } |R| + O(\text{eps}^2) \tag{2}$$

Hierbei sind $F, G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und für gegebenes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren wir mit $|A| \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix, welche die Beträge der Einträge von $A$ enthält:

$$(|A|)_{i,j} = |a_{i,j}|.$$

Beweisen Sie Gleichung (1) durch Induktion (Gleichung (2) geht analog und muss nicht separat bewiesen werden). Tipp: Verwenden Sie mitunter $\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

**( 4 Punkte )**

**Übung 2** *Eigenschaften der LR-Zerlegung*

a) Zeige, dass die Menge der unteren Dreiecksmatrizen mit lauter Einsen auf der Hauptdiagonalen bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet. (Ist diese Gruppe abelsch?) Damit lässt sich (wie bereits in der Vorlesung gezeigt) die Eindeutigkeit der LR-Zerlegung $A = LR$ nachweisen, wenn $L$ eine untere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen auf der Hauptdiagonalen ist.

b) Gegeben sei eine LR-Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $|l_{ij}| \le 1$. Bezeichne $a_i^T$ und $r_i^T$ die $i$-te Reihe von $A$ bzw. $R$. Zeige, dass

$$r_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_j^T$$

gilt und verwende diese Beziehung, um

$$\|R\|_\infty \le 2^{n-1} \|A\|_\infty$$

zu beweisen (Norm der Gleichung bilden - dann Induktion).

**( 4 Punkte )**

**Übung 3** *LR-Zerlegung konkret*

Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 10 & \frac{15}{2} \\ -2 & 6 & 3 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & -\frac{11}{2} \\ -2 & 10 & -12 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 52 \\ 59 \\ -11 \\ -18 \end{pmatrix}$$

- Berechne (mit Bleistift und Papier) die eindeutige LR-Zerlegung von $A$ und die Determinante von $A$. Löse $Ax = b$.
- Berechne die Konditionszahl $\text{cond}_\infty(A)$.

**( 4 Punkte )**

**Übung 4** *LR-Zerlegung (Praktische Übung)*

Zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$) nach der LR-Zerlegung soll der Algorithmus 4.7.1 oder 4.7.2 (siehe Vorlesungsfolien auf der Vorlesungs-Webseite) implementiert werden.

a) Schreibe eine neue Headerdatei `LR.hh`, welche die beiden Template-Funktionen

```
template<class T>
void lr( hdnum::DenseMatrix<T>& A,
         hdnum::Vector<std::size_t>& perm
       ){
              ...
        }
```

und

```
template<class T>
void permute_forward( const hdnum::Vector<std::size_t>& perm,
                      hdnum::Vector<T>& b )
{
  ...
}
```

enthält.

Die Funktion `void lr(...)` soll die LR-Zerlegung von $A$ berechnen und das Ergebnis $L$ und $R$ wiederum in die Matrix `A` speichern. Der Indexvektor `perm` soll sich die Permutation der Zeilen merken.

Die Funktion `void permute_forward(...)` soll dieselben Permutationen auf die Rechte Seite $b$ übertragen.

Zur Vorwärts- und Rückwärtssubstitution können dann die beiden Headerdateien `solveL.hh` und `solveR.hh` aus einer vergangenen Übung benutzt werden.

b) Diese Headerdateien werden benötigt, damit das Hauptprogramm `testLR.cc` (siehe Webseite der Vorlesung) kompiliert werden kann und das dort aufgeführte Gleichungssystem $Ax = b$ nach $x$ gelöst werden kann.

c) Kompiliere das Programm für die beiden Datentypen `double` und `float` und überprüfe, wie groß jeweils die Dimension $n$ maximal sein darf, damit das Programm für das dort aufgeführte Gleichungssystem noch eine richtige Lösung liefert.

d) Schreibe selbst ein neues C++-Programm, welches unter Benutzung der LR-Zerlegung das Gleichungssystem aus der Übungsaufgabe 3 löst!

**( 5 Punkte )**