**Übung 1** *Inversenberechnung (Praktische Übung)*

Als eine erste Anwendung der LR-Zerlegung sind wir nun in der Lage, eine neue Funktion zu schreiben, die zu einer regulären Matrix $A$ ihre Inverse $A^{-1}$ ermittelt und zurückgibt. Schreibe eine solche Funktion und wende sie auf die Matrix $A$ (beliebiger Dimension) an, die durch den HDNUM-Funktionsaufruf

```
hdnum::spd( A );
```

gefüllt wird. Werte anschließend das Produkt aus $A$ und ihrer Inversen aus, um zu überprüfen, ob sie mit der Einheitsmatrix übereinstimmt. Berechne damit auch die beiden Konditionszahlen $\text{cond}_1(A)$ und $\text{cond}_\infty(A)$.

*Zur Erinnerung: Die Doxygen-Doku von* `hdnum::DenseMatrix` *enthält nützliche Hilfen.*

**( 5 Punkte )**

**Übung 2** *LR-Zerlegung von Bandmatrizen*

Bei der Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen (Numerik 2) ergeben sich grosse lineare Gleichungssysteme, bei denen die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine *(p,q)-Bandmatrix* ist mit $0 \leq p, q \leq n-1$, d.h. es gilt $a_{ij} = 0$, falls $j < i - p$ oder $j > i + q$ für $1 \leq i, j \leq n$. Die Größe $m := p + q + 1$ heisst *Bandbreite* der Matrix $A$. In der Regel sind $p$ und $q$ viel kleiner als $n$.
Beispiel: Jede Tridiagonalmatrix ist eine $(1, 1)$-Bandmatrix mit Bandbreite 3.

**Satz:** Bei einer regulären Bandmatrix, für die die LR-Zerlegung *ohne Zeilenvertauschung* durchfürbar ist, d.h. für die eine LR-Zerlegung der Form $A = LR$ existiert, ist die normierte untere Dreiecksmatrix $L$ eine $(p, 0)$-Bandmatrix und die rechte obere Dreiecksmatrix $R$ eine $(0, q)$-Bandmatrix.

**Aufgabe:** Gebe möglichst effiziente Algorithmen zur LR-Zerlegung einer $(p, q)$-Bandmatrix $A$ und zur Lösung der linearen Gleichungssysteme $Ly = b$ und $Rx = y$ an, wobei $A$, $L$ und $R$ wie im Satz beschrieben sind. Bitte jeweils auch die Größenordnung der Anzahl der FLOPs (floating point operations) erwähnen!

**( 5 Punkte )**

**Übung 3** *Curve-Fitting*

Gegeben seien die folgenden Wertepaare:

| $x_i$ | 0 | 0.15 | 0.31 | 0.5 | 0.6 | 0.75 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1.0 | 1.004 | 1.031 | 1.117 | 1.223 | 1.422 |

Gesucht ist ein reelles Polynom $P(x)$ ersten oder zweiten Grades, der den Fehler

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} |P(x_i) - y_i|^2$$

minimiert.
*Zur Erinnerung: Ein reelles Polynom der Ordnung $k$ hat die Gestalt: $P_k(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_k x^k$ mit Koeffizienten $c_0, ..., c_k \in \mathbb{R}$.*

a) Formuliere das Problem um in die Gestalt: Finde ein $c \in \mathbb{R}^{k+1}$ so dass $\|Ac - b\|_2^2$ minimal ist, d.h. gebe jeweils (für $k = 1$ und $k = 2$) die zugehörige Matrix $A$ sowie die beiden Vektoren $c$ und $b$ an.

b) Stelle jeweils die Normalengleichung auf und bestimme die Lösung.

c) Vergleiche die beiden Fehler.

**( 4 Punkte )**

**Übung 4** *Ein physikalisches Ausgleichsproblem*

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls $E\,[\frac{N}{m^2}]$ und der Querkontraktionszahl $\nu$ eines elastischen Materials wird eine quaderförmige Probe in achsenparalleler Lage mit verschiedenen Normalspannungen $\sigma_x$, $\sigma_y$ und $\sigma_z\,[\frac{N}{m^2}]$ belatest. Man misst die resultierenden Dehnungen (rel. Längenänderungen) $\epsilon_x$, $\epsilon_y$ und $\epsilon_z$. Bei zwei Versuchen wurden folgende Dehnungen gemessen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. Versuch: | $\sigma_x = 10^6\,\frac{N}{m^2}$ <br> $\epsilon_x = 3.01 \cdot 10^{-6}$ | $\sigma_y = 0\,\frac{N}{m^2}$ <br> $\epsilon_y = -3.02 \cdot 10^{-6}$ | $\sigma_z = 10^6\,\frac{N}{m^2}$ <br> $\epsilon_z = 3.01 \cdot 10^{-6}$ |
| 2. Versuch: | $\sigma_x = 0\,\frac{N}{m^2}$ <br> $\epsilon_x = -1.01 \cdot 10^{-6}$ | $\sigma_y = 10^6\,\frac{N}{m^2}$ <br> $\epsilon_y = 4.92 \cdot 10^{-6}$ | $\sigma_z = 0\,\frac{N}{m^2}$ <br> $\epsilon_z = -1.01 \cdot 10^{-6}$ |

Das Hooke'sche Gesetz

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

stellt eine Beziehung zwischen Spannung und Dehnung dar. Berechne die Größen $E$ und $\nu$ so, dass das Hooke'sche Gesetz im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate erfüllt ist. Zusatzfrage: Um welchen Stoff könnte es sich gehandelt haben? **( 4 Punkte )**

**Übung 5** *Eigenschaften von $A^T A$ (Bonusaufgabe)*

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$. Sei $\text{Rang}(A) = n$. Zeige, dass dann gilt:

a) $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrisch positiv definit.

b) $\text{cond}_2(A^T A) = \text{cond}_2(A)^2$.

*Bemerkung: Für eine rechteckige Matrix $A$ ist die Kondition allgemein definiert als*

$$\text{cond}(A) := \frac{\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min\limits_{\|y\|=1} \|Ay\|} \,.$$

*Hinweis: Die Aussagen aus Blatt 4 Übung 2 kann man benutzen.*

**( 4 Punkte )**