Übung 1 *Numerische Differenziation*

a) Sei $f \in C^2([a,b])$ eine zweimal differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[a,b]$.
Bei der numerischen Auswertung von $f'(x)$ wählt man eine möglichst kleine Schrittweite h und berechnet den *Vorwärtsdifferenzenquotienten*

$$d_h = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Zeige, dass für den dabei gemachten *Disketisierungsfehler* gilt:

$$|d_h(x) - f'(x)| \leq c \cdot h, \quad c \in \mathbb{R}$$

b) Doch die Schrittweite h darf man nicht zu klein wählen, denn bei der numerischen Differenziation spielt die Auslöschung eine wesentliche Rolle. Sei $f(x)$ der echte Wert von f an der Stelle x und $\tilde{f}(x)$ seine Darstellung auf einem Computer, der mit der Maschinengenauigkeit eps arbeitet. Es gelte also $|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq eps$.
Zeige, dass man die Schrittweite h in der Größenordnung von $\sqrt{eps}$ wählen sollte, um den *Gesamtfehler*

$$|\tilde{d}_h(x) - f'(x)|$$

zu minimieren.

c) Schreibe ein C++-Programm, welches für die Funktion

$$f(x) = \sin(x) + 3x^2$$

den Fehler $|\tilde{d}_h(x) - f'(x)|$ an der Stelle $x = 0.6$ für $h = 10^{-k},\ k = 1, ..., 15$ auflistet. Benutze den Datentyp `double` für die Darstellung der Zahlen.

Hinweis: Als Ergebnis sollte man folgende Ausgabe bekommen:

```
 1: h =   0.1000000000000000, error =   0.2704165235168762
 2: h =   0.0100000000000000, error =   0.0271630556349091
 3: h =   0.0010000000000000, error =   0.0027175412308714
 4: h =   0.0001000000000000, error =   0.0002717664996707
 5: h =   0.0000100000000000, error =   0.0000271767577341
 6: h =   0.0000010000000000, error =   0.0000027178325281
 7: h =   0.0000001000000000, error =   0.0000002702205367
 8: h =   0.0000000100000000, error =   0.0000000458123709
 9: h =   0.0000000010000000, error =   0.0000001110500002
10: h =   0.0000000001000000, error =   0.0000007628169511
11: h =   0.0000000000100000, error =   0.0000016007437845
12: h =   0.0000000000010000, error =   0.0001362586536072
13: h =   0.0000000000001000, error =   0.0007376082974161
14: h =   0.0000000000000100, error =   0.0005944936106480
15: h =   0.0000000000000010, error =   0.0879811887129797
=================================================================
Best Level = 8, minimal error = 0.0000000458123709
```

(1+3+3 Punkte)

Übung 2 *Kondition der Lagrange-Interpolation*

Zu den $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, ..., x_n \in [a,b]$ seien die Lagrange-Polynome $L_i^{(n)}(x)$, $i \in \{0, ..., n\}$ gegeben. Für die dort zu interpolierenden Werte $y_0, ..., y_n$ definieren wir den Interpolationsoperator I_n durch die Abbildung

$$\begin{aligned} I_n : \quad & \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{P}_n \\ & I_n(y_0, ..., y_n) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i^{(n)}(x) \end{aligned}$$

vom $\mathbb{R}^{n+1}$ in den Raum der Polynome vom Grade kleiner oder gleich n.

a) Zeige, dass I_n linear ist.

b) Mit der sog. **Lebesgue-Funktion**

$$L^n(x) := \sum_{i=0}^{n} |L_i^{(n)}(x)|$$

wird die **Lebesgue-Konstante** $\Lambda_n := \|L^n\|_\infty$ definiert. Sei $\delta := (\delta_0, ..., \delta_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\|\delta\|_\infty = 1$ eine *Störung* der "gemessenen" Werte $y_0, ..., y_n$. Zeige, dass

$$\|I_n(\delta)\|_\infty \leq \Lambda_n \cdot \|\delta\|_\infty$$

gilt.

c) Wieso kann man demnach Λ_n als absolute Konditionszahl für den Interpolationsoperator wählen?

d) Berechne Λ_n auf dem Intervall $[a, b] = [-1, 1]$ für $n = 5, 10, 15, 20$

- einmal für die äquidistanten Stützstellen $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$, $k = 0, ..., n$,
- und einmal für die sog. Tschebyscheff-Stützstellen $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2} \cdot \pi\right)$, $k = 0, ..., n$.

Natürlich darf man auch bei dieser Teilaufgabe den Rechner anstrengen! Um die Maximumsnorm einer stetigen Funktion auf einem Intervall auszuwerten, kann man z.B. so vorgehen: Streue eine große Menge von Punkten gleichmäßig über dem Intervall und werte die Funktion an diesen Stellen aus. Bestimme davon das Maximum.

(1+2+1+3 Punkte)

Übung 3 *Baryzentrische Gewichte*

Zu den $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, ..., x_n \in [a, b]$ seien die Lagrange-Polynome $L_k^{(n)}(x)$, $k \in \{0, ..., n\}$ gegeben.

Durch

$$\lambda_k := \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_k - x_j},\ i = 0, ..., n$$

werden die **baryzentrischen Gewichte** definiert.

Weiterhin seien die zu interpolierenden Werte $y_0, ..., y_n$ gegeben.

a) Zeige: Das Lagrangesche Interpolationspolynom $p(x)$ kann durch

$$p(x) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{x-x_k}\, y_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{x-x_k}}$$

dargestellt werden.

b) Zeige: Für eine äquidistante Unterteilung $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ des Intervalls $[a, b]$ genügt die Auswertung der Terme

$$(-1)^k \binom{n}{k},$$

um den Ausdruck in (a) zu berechnen. Damit lässt sich das Lagrangesche Interpolationspolynom in nur O(n) Operationen auswerten.

(2+2 Punkte)