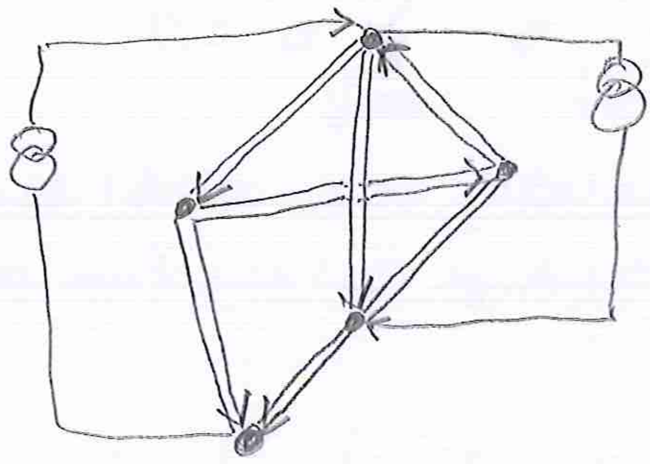
2 Motivation Linearer Gleichungssysteme

2.1 Strömung in Rohrleitungsnetzen



1) Netzwerk von Röhren beschrieben durch gerichteten Graphen.

- Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $|V| = n$.
- Kantenmenge $E = \{e_1, \dots, e_M\}$, $|E| = M$,

  $E \subseteq V \times V$, mit $(v,w) \in E \Rightarrow (w,v) \notin E$
- $E = E_R \cup E_p$ „Röhren und Pumpen", $|E_R| = m$,

  $E_R = \{e_1, \dots, e_m\}$, $E_p = \{e_{m+1}, \dots, e_M\}$.

eigentlich hier!

2) Gesetz von Hagen-Poiseuille.

Röhre $e = (v, w)$ (von Knoten v nach Knoten w)

$$q_e = \frac{\pi r_e^4}{\underbrace{8 \eta d_e}_{=: L_e \text{ „Leitfähigkeit"}}} \Delta p_e \qquad (2.1)$$

r_e : Radius der Röhre e [m]

d_e : Länge der Röhre e [m]

η : dyn. Viskosität Flüssigk. [Pa s]

q_e: Volumenstrom [m^3/s]

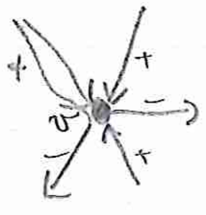
Orientierung: $q_e > 0$ falls Fluss von Knoten v nach w.

$q_e < 0$ Fluss von w nach v

Δp_e : gerichtete Druckdifferenz über Rohr e [Pa] = [$\frac{N}{m^2}$]

$\Delta p_e > 0 \rightarrow q_e > 0$

3) Knotenregel (1. Kirchhoffsches Gesetz)



$$E_v^+ = \{(u,w) \in E \mid w = v\} \quad \text{„ausgehend"}$$
$$E_v^- = \{(u,w) \in E \mid u = v\} \quad \text{„eingehend"}$$

$$\sum_{e \in E_v^+} q_e - \sum_{e \in E_v^-} q_e = 0 \qquad \forall\, v \in V. \qquad (2.2)$$

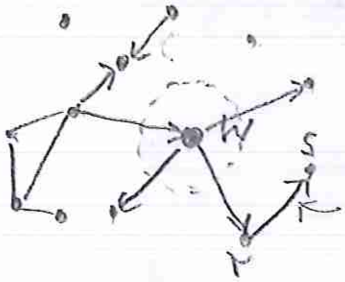
Grund: Massenerhaltung, Knoten speichert keine Flüssigkeit.

Nur $n-1$ der Beziehungen (2.2) sind linear unabhängig:

Wähle $w \in V$.

$$\sum_{v \in V \setminus \{w\}} \underbrace{\left(\sum_{e \in E_v^+} q_e - \sum_{e \in E_v^-} q_e \right)}_{=0\,!} = \sum_{v \in V \setminus \{w\}} \sum_{e \in E_v^+} q_e - \sum_{v \in V \setminus \{w\}} \sum_{e \in E_v^-} q_e$$

$$= \boxed{\sum_{e \in E_w^-} q_e - \sum_{e \in E_w^+} q_e = 0}$$



$e' = (r, s)$ $r \neq w$, $s \neq w$
Kommt genau zweimal vor: $+q_{e'}$ für Knoten s (eingehend)
$-q_{e'}$ für Knoten r (ausgehend)

Knotenregel für $v \in V \setminus \{w\}$ erfüllt $\Rightarrow$ Knotenregel für w erfüllt.

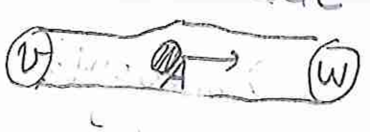
4) Maschenregel (2. Kirchhoffsches Gesetz)

- Betrachte $C \subseteq E$, C beliebigen geschlossener Pfad
- $C^+ = \{ e \in C \mid e$ genauso wie C orientiert$\}$
  $C^- = \{ e \in C \mid e$ entgegen C orientiert$\}$

Dann gilt (Bem: Eine Kante darf in C mehrmals vorkommen).

$$\sum_{e \in C^+} \Delta p_e - \sum_{e \in C^-} \Delta p_e = 0 \qquad \forall \text{ Pfade} \qquad (2.3)$$

Grund:



$\int_v^w \underset{\frac{N}{m^2}}{\Delta p_e} \cdot \underset{m^2}{A} \cdot \underset{m}{ds}$ ist Energie die notwendig ist um Probekörper von v nach w zu bringen

- Betr. zwei bel. Knoten: r, s. Energie um K. von r nach s zu bringen unabhängig von Weg.
- Lineare Abhängigkeit!

5) Knotenpotentialverfahren

Folge der Maschenregel:

„Drücke“ („Potentiale“)

$v \xrightarrow{e} w$, p_v, p_w: $p_v > p_w \Rightarrow \Delta p_e = p_v - p_w > 0 \Rightarrow q_e > 0$

- Man darf $n-1$ Knotendrücke p_v als Unbekannte wählen
- $e=(v,w)$: $\Delta p_e = p_v - p_w$ (Bemerkung: von v nach w!)
- Druck in einem (Referenz-)Knoten r kann willkürlich festgelegt werden. z.B. $p_r = 0$. ($p_v, v \in V$ Lösung $\Rightarrow p_v + \text{const}$ auch Lösung)

$\Rightarrow$ Maschenregel ist dann für alle Pfade erfüllt.

„Röhren“, hat nichts mit Referenzknoten p_r zu tun!

a) $\forall e \in E_R$ schreibe Druckdifferenzen:

$$e_k = (v,w) \in E_R: \quad \Delta p_e = \begin{cases} p_v - p_w & v \neq r \wedge w \neq r \\ p_v & w = r \\ -p_w & v = r \end{cases} \qquad r: \text{Referenzknoten}$$

Wähle „Anordnung“ $e_k \leftrightarrow k$ $\quad v_i \leftrightarrow i$ $\quad$ Wahl $\boxed{r = v_n}$

$$\begin{array}{c} \\ e_k=(v_i,v_j): k \end{array} \begin{bmatrix} \Delta p \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} & 1 & & -1 & \\ & & B & & \end{bmatrix} \\ \quad i \qquad j \end{array} \begin{bmatrix} p \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow p = (p_{v_1}, \dots, p_{v_{n-1}})^T$

$\Delta p = (\Delta p_1, \dots, \Delta p_m)$

\# Röhren.

$m \times (n-1)$ Matrix mit $m \geq n-1$

$|E_R| \quad |V|-1$ da Graph verbunden ist.

b) Leitfähigkeiten:

$\circ\!-\!\!-\!\circ\!-\!\!-\!\circ\!-\!\!-\!\circ \cdots -\!\circ$

$m = n-1$

$$e \in E_R: \quad q_e = L_e \, \Delta p_e$$

als Matrix:

$$\begin{bmatrix} q \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L \end{bmatrix}}_{\substack{m \times m \\ \text{Diagonalmatrix}}} \begin{bmatrix} \Delta p \end{bmatrix} \qquad m = |E_R|$$

c) Knotenregeln: $n-1$ Stück für Knoten $v_1, \dots, v_{n-1}$ (exklusive Referenzknoten)

$$v \in V \setminus \{v_n\}: \sum_{e \in E_v^+} q_e - \sum_{e \in E_v^-} q_e = 0$$

Pumpenströme auf rechte Seite $\Longleftrightarrow$

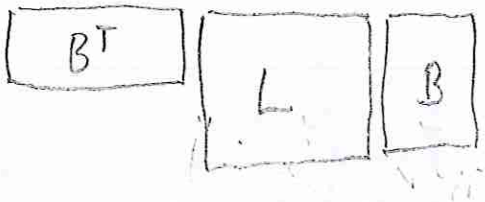
$$\sum_{e \in E_v^+ \cap E_R} q_e - \sum_{e \in E_v^- \cap E_R} q_e = \sum_{e \in E_v^- \cap E_P} q_e - \sum_{e \in E_v^+ \cap E_P} q_e$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} B^T \end{bmatrix}}_{(n-1) \times m \text{ Matrix}} \begin{bmatrix} q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$$

$b = (b_1, \dots, b_{n-1})$ enthält Pumpenströme

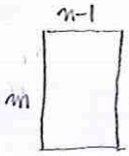
Alles zusammen:

$$\underbrace{B^T L B}_{=:A}\, p = b$$



$\Leftrightarrow \quad A p = b$

- A ist $(n-1)\times(n-1)$ Matrix



- A ist symmetrisch und positiv definit, d.h. $x^T A x > 0 \;\forall x \neq 0$
- damit insbesondere invertierbar

Bew: 1) $B \in \mathbb{R}^{m\times(n-1)}$ hat max. Rang, also $n-1$ da $m \geq n-1$, $n-1$ linear unabh. Spalten!
2) L diagonal mit $l_{ii} > 0$
3) Sei $x \neq 0$, $y := Bx$ damit $x^T A x = \sum_i l_{ii} y_i^2 > 0$ da $\dim(\ker(B)) + \operatorname{rang}(B) = n-1$ und $\operatorname{rang}(B) = n-1 \Rightarrow \dim(\ker(B)) = 0$ also $y = 0$ nur für $x = 0$.

- A ist dünn besetzt:

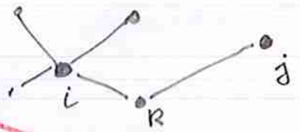
$$a_{ij} \neq 0 \iff \cancel{(v_i, v_j) \in E \vee (v_j, v_i) \in E}$$

$\exists k: \left((v_i, v_k) \in E_R \vee (v_k, v_i) \in E_R\right) \wedge \left((v_k, v_j) \in E_R \vee (v_j, v_k) \in E_R\right)$

sehr viele Einträge sind Null, typischerweise

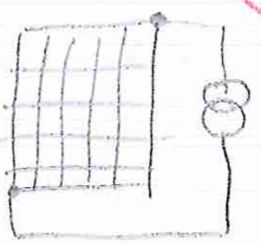
$$\left|\{(i,j) \mid a_{ij} \neq 0\}\right| = O(n) \quad (\text{statt } n^2).$$

$$(B^T B)_{ij} = \sum_{k \in nz(i)} (B^T)_{ik} \cdot B_{kj}$$



Ü1 : ein kleines Netzwerk

Ü2 : New York City



- völlig analog lassen sich elektrische Netzwerke (aus Widerständen) behandeln

Ohmsches Gesetz:

$$i_e = \frac{1}{R_e}(u_v - u_w)$$

i_e : Strom durch Widerstand R_e

u_v : Knotenpotentiale

R_e : Widerstand

- RLC Netzwerke mit harmonischer Anregung
  → komplexe Ströme und Spannungen

$$A x = b \quad \text{mit } x, b \in \mathbb{C}^n, \; A \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

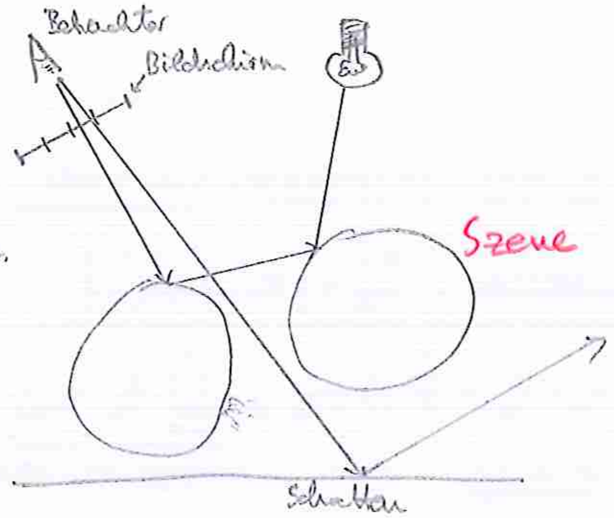
L: Spulen
C: Kapazitäten

- RLC Netzwerke mit beliebiger Anregung
  (lineares) differentiell-algebr. System
  ⇒ Numerik 1.

3.2 Radiosity-Methode in der Computergrafik

Beleuchtung einer „Szene".

Ray-Tracing:



Nachteil: starke Schatten.

Radiosity-Methode:

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x \text{ auf Oberfläche eines Objekts} \}$$

Bestimme $B : S \to \mathbb{R}$ „Energiedichte"

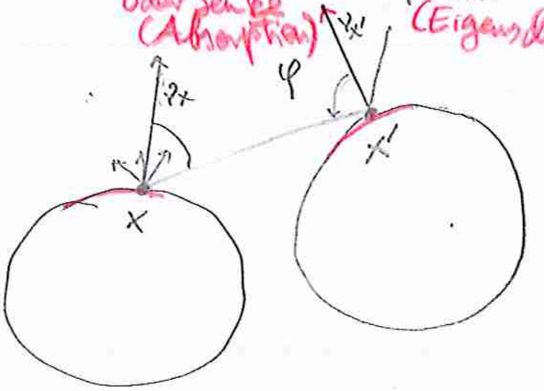
$$\int_\omega B \, dA = \text{von } \omega \subset S \text{ abgestrahlte Energie}$$

Energie wird von einem Punkt $x \in S$ in alle Richtungen abgestrahlt. (aber nicht gleichmäßig)

Bestimmungsgleichung für $B(x)$:

$$B(x) = E(x) + \rho(x) \overbrace{\int_S B(x') \underbrace{\frac{\cos\varphi_{x,x'} \cos\varphi_{x',x}}{\|x-x'\|^2} V(x,x')}_{=: \lambda(x,x') \text{ „Kern"}} d\cancel{x'}\,x'}^{\text{reflektiertes Licht}}$$

$x \in S$ ↑ $B(x)$; Eigenstrahlung (Lichtquelle) oder Senke (Absorption) ↑ $E(x)$; Reflexionsfaktor (Eigenschaft von x) ↑ $\rho(x)$; Licht von x' ↑ $B(x')$



$$\varphi_{a,b} = \sphericalangle(\nu_a, b-a)$$

$$\cos\varphi_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{Licht trifft aus Richtung } \nu_a \text{ ein} \\ 0 & \text{Licht trifft tangential zur Oberfl. ein} \end{cases}$$

Sichtbarkeit (Visibility)

$$V(x,x') = \begin{cases} 1 & x' \text{ von } x \text{ aus sichtbar} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Eigenschaft der Szene)

<u>Integralgleichung</u> für $B(x): S \to \mathbb{R}$:

$$B(x) - \rho(x) \int_S B(x') \lambda(x,x') \, d\cancel{x'} = E(x) \qquad \forall x \in S.$$

<u>Numerische Lösung mit „Kollokationsmethode".</u>

a) Zerlegung der Oberfläche: $\mathcal{T}_h = \{t_1, \dots, t_n\}$

$$t_i \subset S \;, \; t_i \cap t_j = \emptyset \;\; \forall i \neq j \,, \;\; \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{t_i} = S}_{\text{Könnte man abschwächen.}}$$

t_i: offene Gebiete.

Zu $t \in \mathcal{T}_h$ wähle x_t = Mittelpunkt von t.

Dieser Prozess heißt auch <u>Diskretisierung</u>. Üblich bei Differential- und Integralgleichungen.

b) Approximiere $B: S \to \mathbb{R}$ durch diskrete Funktion $B_h: S \to \mathbb{R}$.

$$B_h(x) = \sum_{j=1}^{n} z_j \varphi_j(x)$$

$z_j \in \mathbb{R}$ Koeffizient

$\varphi_j: S \to \mathbb{R}$ „Basisfunktion"

d.h. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig.

stückweise konstante Funktionen:

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in t_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) Erfülle Integralgleichung nur für $x \in X_h = \{x_{t_1}, \dots, x_{t_n}\}$.

$$B_h(x_i) - \rho(x_i) \int_S B_h(x') \lambda(x_i, x') \, dA' = E(x_i) \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} z_j \varphi_j(x_i) - \rho(x_i) \int_S \sum_{j=1}^{n} z_j \varphi_j(x') \lambda(x_i, x') \, dA' = E(x_i) \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} z_j \underbrace{\left\{ \varphi_j(x_i) - \rho(x_i) \int_S \varphi_j(x') \lambda(x_i, x') \, dA' \right\}}_{=: a_{ij}} = \underbrace{E(x_i)}_{b_i} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{Az = b}.$$

- Integral in a_{ij} wird i.d.R. auch numerisch berechnet.
  ⇒ Methoden später in der Vorlesung.

- Man begeht einen Diskretisierungsfehler

  Norm auf Raum der Funktionen

  $$\| B - B_h \| = O(h^\alpha) \qquad \text{(Konvergenz)}$$

  mit $h := \max_{t \in T_h} \operatorname{diam}(t)$, α: „Konvergenzordnung".

  d.h. je feiner die Unterteilung $(n \to \infty)$, desto besser approximiert B_h die gesuchte Funktion B.

  ⇒ Gleichungssysteme können beliebig groß werden.
  (im Gegensatz zum Röhrennetzwerk).

- A ist in diesem Fall <u>nicht</u> dünn besetzt sondern voll besetzt!

3: Konditionierung der Lösung linearer Gleichungssysteme

3.1 Lösbarkeit

Gegeben Matrix A, Vektor b:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = (b_i)_{i=1}^{m} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Gesucht ist $x = (x_j)_{j=1}^{n} = (x_1, \dots, x_n)^T$ so dass

$$\forall i : \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$$

bzw.

$$Ax = b. \tag{3.1}$$

Die Zahlen a_{ij}, b_i, x_j können aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sein.

Das Gleichungssystem (3.1) heißt

bei maximalem Rang von A:

- unterbestimmt falls $m < n$ — i. allg. viele Lösungen
- quadratisch falls $m = n$ — genau eine Lösung
- überbestimmt falls $m > n$ — $b \in$ Bild(A).

Es gibt mindestens eine Lösung falls

$$\text{Rang}(A) = \text{Rang}([A|b]) = \text{Rang}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}\right)$$

Für <u>quadratische</u> Matrizen sind folg. Aussagen äquivalent:

(i) $Ax = b$ ist für jedes b eindeutig lösbar.

(ii) Rang$(A) = n$.

(iii) $\det(A) \neq 0$.

(iv) A hat keinen Eigenwert Null.

3.2 Vektornormen

Quantifizieren von Fehlern erfordert Normen.

Im Folgenden sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ der zugrunde liegende Körper und $\mathbb{K}^n$ der darauf aufbauende Vektorraum.

Definition 3.1 (Vektornorm)

Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ heißt Norm falls gilt

(N1)	$\|x\| > 0$	$x \neq 0$	(Definitheit)
(N2)	$\|\alpha \cdot x\| = \|\alpha\| \, \|x\|$	$x \in \mathbb{K}^n, \alpha \in \mathbb{K}$	(positive Homogenität)
(N3)	$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$	$x, y \in \mathbb{K}^n$	(Subadditivität, Dreiecksungl.) ∎

Beispiel 3.2 Häufig verwendete Normen sind:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{Euklidische Norm, } \ell_2\text{-Norm}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \qquad \text{Maximumnorm, } \ell_\infty\text{-Norm}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \ell_1\text{-Norm}$$

Man zeigt über die Konvergenz von Folgen von Vektoren:

$$\forall i = 1,\dots,n: x_i^{(t)} \to x_i \quad (t \to \infty) \quad \Longleftrightarrow \quad \|x^{(t)} - x\| \to 0 \quad (t \to \infty)$$

(Konvergenz der Normen äquivalent zu komponentenweiser Konvergenz).
⤳ siehe nächster Satz

Eine wichtige Folgerung aus (N3) ist die inverse Dreiecksungleichung

$$\|x - y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big| \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}^n. \tag{3.2}$$

Beweis:

$$\|x\| = \|x - y + y\| \overset{(N3)}{\leq} \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$$

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \Rightarrow \|x - y\| \geq \|y\| - \|x\| = -(\|x\| - \|y\|)$$

Aus (3.2) folgt (Stetigkeit der Funktion $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$): ∎

$$\|x^{(t)} - x\| \to 0 \quad (t \to \infty) \Longrightarrow \|x^{(t)}\| \to \|x\| \quad (t \to \infty)$$

Satz 9.3 (Äquivalenz aller Normen)

Auf $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen im folgenden Sinne äquivalent:
Zu $\|.\|$, $\|.\|'$ gibt es Zahlen $m, M > 0$ aus $\mathbb{R}$ so dass gilt

$$m\|x\|' \leq \|x\| \leq M\|x\|' \qquad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

Beweis: Es genügt dies zu zeigen für $\|.\|' = \|.\|_\infty$.
Seien $e_1, \dots, e_n$ die kartesischen Einheitsvektoren. Jedes $x \in \mathbb{K}^n$ hat die Darstellung $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, also $\|x\| = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|\right) \sum_{i=1}^n \|e_i\| = \|x\|_\infty \underbrace{\sum_i \|e_i\|}_{=\gamma}$
wg. $\|x\| \leq \gamma \|x\|_\infty$ ist $\|.\|$ stetig bezügl. komponentenweiser Konvergenz.

Punktmenge $S \equiv \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_\infty = 1\} \subset \mathbb{K}^n$ ist – beschränkt (bzgl. $\|.\|$ da $\|x\| \leq \gamma$)
– abgeschlossen, d.h. Grenzwerte von Folgen aus S sind in S (da $\mathbb{K}^n$ metrischer Raum).
⇒ „kompakt"

Die Funktion $\|.\|: S \to \mathbb{R}_+$ nimmt auf S ihr Minimum und Maximum an, d.h.:
Es gibt $\underline{x}, \bar{x} \in S$:

$$\underbrace{0 < \|\underline{x}\|}_{\text{da } 0 \notin S,\ \underline{x} \in S \text{ und N1.}} \leq \|x\| \leq \|\bar{x}\| \leq \gamma \underbrace{\|\bar{x}\|_\infty}_{=1 \text{ da } \bar{x} \in S} = \gamma \qquad \forall x \in S$$

Nun sei $y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ beliebig.
Dann ist $y/\|y\|_\infty \in S$ (da Norm 1) und somit

$$\|\underline{x}\| \leq \|y/\|y\|_\infty\| \underset{(N2)}{=} \frac{1}{\|y\|_\infty}\|y\| \leq \|\bar{x}\|$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\|\underline{x}\|}_{=m} \|y\|_\infty \leq \|y\| \leq \underbrace{\|\bar{x}\|}_{=M} \|y\|_\infty$$

∎

Vorsicht: m, N hängen i.d.R. von der Dimension n ab.
Aufpassen wenn man etwas für $n \to \infty$ beweist.

Nochmal zur Konvergenz:
$x_i^{(t)} \to x_i \ (t \to \infty) \Longleftrightarrow \|x^{(t)} - x\|_\infty \to 0 \ (t \to \infty)$ überlegt man leicht
Satz 9.3 zeigt dann, dass man auch eine beliebige Norm nehmen darf.

3.3 Matrixnormen

Der $\mathbb{K}^{m\times n}$ stellt auch einen Vektorraum dar und kann mit dem $\mathbb{K}^{m\cdot n}$ identifiziert werden.

Damit definiert jede Norm auf $\mathbb{K}^{m\cdot n}$ auch eine Norm auf $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$.

$A^{(t)}\to A\ (t\to\infty)$ meint dann $a_{ij}^{(t)}\to a\ (t\to\infty)\ \forall\, i,j\in\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}$

Es zeigt sich, dass folgende Eigenschaften hilfreich sind:

<u>Definition 3.4</u> Eine Norm $\|.\|$ auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ ($m\neq n$ würde zwei V-Normen erfordern) heißt <u>verträglich</u> mit einer Vektornorm $\|.\|$ auf $\mathbb{K}^n$ falls gilt

$$\|Ax\|\le\|A\|\,\|x\|\qquad x\in\mathbb{K}^n,\ A\in\mathbb{K}^{n\times n}.$$

Sie heißt <u>Matrixnorm</u>, wenn sie submultiplikativ ist:

$$\|AB\|\le\|A\|\,\|B\|\qquad A,B\in\mathbb{K}^{n\times n}.$$

<u>Beispiel 3.5</u> Die Frobenius-Norm

$$\|A\|_{Fr}:=\left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

ist eine Matrixnorm, die verträglich mit der euklidischen Norm ist.

Beweis: (als Ü?) C.S. $|\langle x,y\rangle|^2\le\|x\|^2\|y\|^2$

$$\|Ax\|_2^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2}_{=\|x\|_2^2}\right)=\|x\|_2^2\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}_{=\|A\|_{Fr}^2}.\ \boxed{q.e.d.}$$

<u>Definition 3.6 (Zugeordnete Matrixnorm)</u>

Es sei $\|.\|$ eine beliebige (Vektor-)Norm auf $\mathbb{K}^n$. Dann heißt

$$\|A\|:=\sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\overset{(N2)}{=}\sup_{x\in\mathbb{K}^n,\ \|x\|=1}\|Ax\|$$

die $\|.\|$ zugeordnete (oder natürliche) Matrixnorm. $\|.\|$ ist verträglich und submultiplikativ. $\boxed{q.e.d.}$

(Übung): <u>Beweis dazu</u> $y\neq0$ beliebig $\dfrac{\|Ay\|}{\|y\|}\le\sup_{x\neq0}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}=\|A\|\Rightarrow\|Ay\|\le\|A\|\,\|y\|$

$$\|AB\|=\sup_{x\neq0}\frac{\|ABx\|}{\|x\|}\le\sup_{x\neq0}\frac{\|A\|\,\|Bx\|}{\|x\|}=\|A\|\sup_{x\neq0}\frac{\|Bx\|}{\|x\|}=\|A\|\,\|B\|.$$