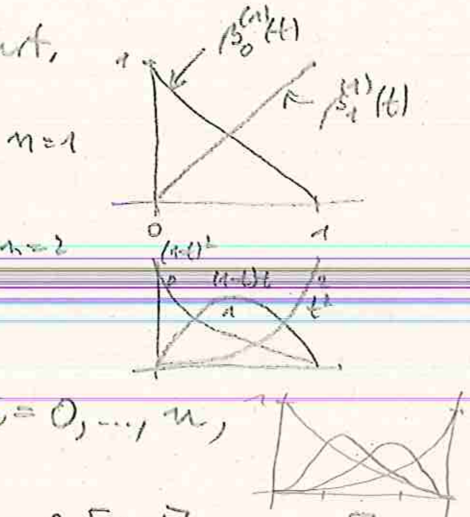
# 5.4 Bernsteinpolynome und Kurvendarstellung



Wir gehen nun über von der Interpolation zur Approximation. Speziell für Kurven, d.h. Funktionen $u(t): [a,b] \to \mathbb{R}^d$, $d=2,3$, haben sich Bernstein-Polynome bewährt.




## Definition 5.11 (Bernstein-Polynome)

Die Polynome

$$\beta_i^{(n)}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i \qquad i=0,\dots,n,$$

vom Grad n heißen Bernstein-Polynome auf $[0,1]$.

Mittels der Transformation $\varphi: [a,b] \to [0,1]$, $\varphi(u) = \frac{u-a}{b-a}$, definiert man die Bernstein-Polynome auf einem allgemeinen Intervall $[a,b]$:

$$\beta_{i,[a,b]}^{(n)} = \beta_i^{(n)}(\varphi(u)) = \binom{n}{i}\left(\overset{\frac{b-a}{b-a}}{1} - \frac{u-a}{b-a}\right)^{n-i}\left(\frac{u-a}{b-a}\right)^i$$

$$= \binom{n}{i}\frac{1}{(b-a)^n}(b-u)^{n-i}(u-a)^i.$$

## Satz 5.12 (Eigenschaften der Bernstein-Polynome)

(a) $\sum_{i=0}^{n} \beta_i^{(n)}(t) = 1$

Beweis: binomischer Lehrsatz: $1 = (1-t+t)^n = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i}_{=\beta_i^{(n)}(t)}$

(b) $t=0$ ist $i$-fache Nullstelle von $\beta_i^{(n)}$

Beweis: Es sei $0 \le j \le i$, dann ist wg Produktregel $\frac{d^j}{dt^j}\beta_i^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{j} g^{(k)}(t)\, t^{i-k}$

und damit $\frac{d^j}{dt^j}\beta_i^{(n)}(0) = 0$ falls $i-j>0 \Leftrightarrow 0 \le j < i$

d.h. $i=0$: keine Nullstelle

$i=1$: $0 \le j < 1$ eine Nullstelle

$i=2$: $0 \le j < 2$ Nullstelle, Nullstelle der Ableitung

(c) $t=1$ ist $n-i$-fache Nullstelle von $\beta_i^{(n)}$

$\Rightarrow$ $t=0$, $t=1$ sind die einzigen Nullstellen

Beweis: analog zu (b).

(d) Symmetrie: $\beta_i^{(n)}(t) = \beta_{n-i}^{(n)}(1-t)$

Bew: Einsetzen

(e) Positivität – $0 \le \beta_i^{(n)} \le 1$ für $t \in [0,1]$

– $\beta_i^{(n)}(t) > 0$ für $t \in (0,1)$

Beweis: $t \in [0,1] \Rightarrow t \ge 0,\ 1-t \ge 0$ also $\beta_i^{(n)}(t) \ge 0$

$t \in (0,1) \Rightarrow t > 0,\ 1-t > 0$ also $\beta_i^{(n)}(t) > 0$

und $\sum_{i=0}^{n} \beta_i^{(n)}(t) = 1 \Leftrightarrow \beta_i^{(n)}(t) = 1 - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \underbrace{\beta_j^{(n)}(t)}_{\ge 0} \le 1.$

(f) $\beta_i^{(n)}$ hat in $[0,1]$ genau ein Maximum in $i/n$

$$\frac{d}{dt}\beta_i^{(n)}(t) = \binom{n}{i}\left[-(n-i)(1-t)^{n-i-1}t^i + i(1-t)^{n-i}t^{i-1}\right]$$

$$= \binom{n}{i}(1-t)^{n-i-1}t^{i-1}\big(\underbrace{(1-t)i-(n-i)t}_{i-it-nt+it}\big)$$

$$= \binom{n}{i}\underbrace{(1-t)^{n-i-1}}_{\substack{n-i-1\text{-fache} \\ \text{Nst bei} \\ t=1}}\underbrace{t^{i-1}}_{\substack{i-1\text{-fache} \\ \text{Nullstelle} \\ \text{bei } t=0}}\underbrace{(i-nt)}_{\substack{\text{Nullstelle} \\ \text{bei } t=i/n}}$$

$n-\cancel{i}-1+\cancel{i}-1+1$
$= n-1$ Nullstellen.
da $\frac{d}{dt}\beta_i^{(n)}$ Polynom vom Grad $n-1$ sind dies alle!

Aus (b) und (c) und (e) folgt dass bei $i/n$ ein Maximum vorliegt.

(g) Die $\{\beta_i^{(n)}\}_{i=0}^{n}$ sind linear unabhängig und bilden eine Basis von $P_n$.

Bew: zu zeigen $\sum_{i=0}^{n} b_i\beta_i^{(n)}(t) = 0\ \underline{\forall t \in \mathbb{R}.} \Rightarrow b_i = 0.$

Betrachte Ableitungen: $\frac{d^j}{dt^j}\sum_{i=0}^{n} b_i\beta_i^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} b_i\frac{d^j}{dt^j}\beta_i^{(n)}(t) \overset{!}{=} 0\ \forall t \in \mathbb{R}$ da $\sum b_i\beta_i$ Nullfunk

Setze $j=0, t=0$: Es ist nur $\beta_0^{(n)}(0) \neq 0$, alle anderen haben dort Nullst. $\Rightarrow b_0 = 0$

$j=1, t=0$: Es ist nur $\frac{d}{dt}\beta_1^{(n)}(0) \neq 0 \Rightarrow b_1 = 0$

usw.

(h) Die Bernstein-Polynome erlauben folgende rekursive Darstellung über den Grad $n$:

$$\beta_i^{(n)}(t) = \begin{cases} (1-t)\,\beta_0^{(n-1)}(t) & i=0 \\ t\,\beta_{i-1}^{(n-1)}(t) + (1-t)\,\beta_i^{(n-1)}(t) & 0<i<n \\ t\,\beta_{n-1}^{(n-1)}(t) & i=n \end{cases}$$

Bew. $i=0$, $i=n$ sieht man durch einsetzen.

$0<i<n$

$$t\binom{n-1}{i-1}(1-t)^{n-1-(i-1)}t^{i-1} + (1-t)\binom{n-1}{i}(1-t)^{n-1-i}t^{i}$$

$$= \binom{n-1}{i-1}(1-t)^{n-i}t^{i} + \binom{n-1}{i}(1-t)^{n-i}t^{i} = \Big[\underbrace{\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}}_{=\binom{n}{i}}\Big](1-t)^{n-i}t^{i}$$

Rekursionsformel für Binomialk.

(i) Für die erste Ableitung gilt die Rekursionsformel:

$$\frac{d}{dt}\beta_i^{(n)}(t) = \begin{cases} -n\,\beta_0^{(n-1)}(t) & i=0 \\ n\left[\beta_{i-1}^{(n-1)}(t) - \beta_i^{(n-1)}(t)\right] & 0<i<n \\ n\,\beta_{n-1}^{(n-1)}(t) & i=n \end{cases}$$

Kein Beweis?

Achtung: Rechts stehen keine Ableitungen sondern Bernstein-Polynome vom Grad $n-1$ !

$\boxtimes$

Kurvendarstellung mittels Bernstein-Polynomen beschreibt:

Definition 6.13 (Bezier-Kurven)

Für gegebene Punkte $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}^d$ heißt das vektorwertige Polynom

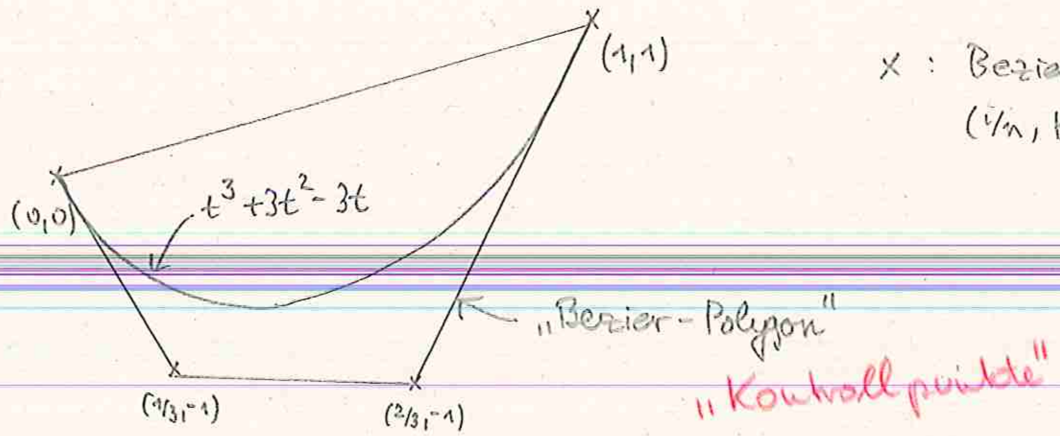
$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i\,\beta_i^{(n)}(t)$$

Bezier-Kurve.

## Beispiel 5.17

Betrachte $b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Zugehörige Bezier-Kurve: $B(t) = \sum_{i=0}^{3} b_i \beta_i^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 + 3t^2 - 3t \end{pmatrix}$



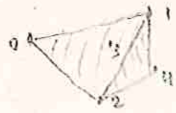

Die Verbindung der Punkte $(i/n, b_i)$ nennt man „<u>Bezier-Polygon</u>".

Es gelten folgende Eigenschaften:

- Das Bezier-Polynom liegt in der konvexen Hülle der Bezier-Punkte.

  $B(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i \beta_i^{(n)}(t)$ ist wegen $0 \le \beta_i^{(n)}(t) \le 1$ und $\sum_{i=0}^{n} \beta_i^{(n)}(t) = 1$

  eine Konvexkombination.



- Es ist $B(0) = b_0$ und $B(1) = b_n$ (Liegt an den Nullstellen 5.12 b,c)
- Die Ableitung (Tangente an die Kurve) hat den Endpunkten die Richtung $(b_1 - b_0)$ bzw. $(b_n - b_{n-1})$.

  Nutze rekursive Darstellung aus Satz 5.12 (i):

$$\frac{d}{dt} B(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{d}{dt} \beta_i^{(n)}(t) =$$

$$= b_0 \left[ -n \underbrace{\beta_0^{(n-1)}(t)}_{=1} \right] + b_1 \left[ n \left( \underbrace{\beta_0^{(n-1)}(t)}_{=1} - \underbrace{\beta_1^{(n-1)}(t)}_{=0} \right) \right] \ldots$$

$$\ldots + b_{n-1} \left[ n \left( \beta_{n-2}^{(n-1)}(t) - \underbrace{\beta_{n-1}^{(n-1)}(t)}_{=1} \right) \right] + b_n \left[ n \underbrace{\beta_{n-1}^{(n-1)}(t)}_{=1} \right]$$

<u>$t=0$</u> : $\beta_0^{(n-1)}(0) = 1$ : $-n b_0 + b_1 \cdot n = n(b_1 - b_0)$

<u>$t=1$</u> : $\beta_{n-1}^{(n-1)}(1) = 1$ : $b_{n-1}(-n) + b_n n = n(b_n - b_{n-1})$.

$= \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$ Fallunterscheidung

Bernstein-Polynome erlauben eine gute Kontrolle der Werte des Polynoms durch dessen Koeffizienten.
Vergleichen wir dies mit anderen Polynombasen:

- Monome, Newton: Koeffizienten erlauben keine einfache Kontrolle der Werte des Polynoms
- Lagrange: Erlaubt exakte Kontrolle an den Stützpunkten, dazwischen aber (sehr) große Abweichungen.
- Bernstein: $\min\{b_0,\dots,b_n\} \le \sum_{i=0}^{n} b_i \beta_i^{(n)}(t) \le \max\{b_0,\dots,b_n\}$.

Eine effiziente und numerisch stabile Auswertung einer Bezierkurve erlaubt der

## Algorithmus von de Casteljau

Mit Hilfe der Rekursionsformel aus Satz 5.12(h) erhält man

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i^{(0)} \beta_i^{(n)}(t)$$

$b_i^{(0)}$ ← Eingabekoeffizienten

$$= b_0^{(0)}(1-t)\beta_0^{(n-1)}(t) + b_1^{(0)}\left[t\beta_0^{(n-1)}(t) + (1-t)\beta_1^{(n-1)}(t)\right]$$
$$+ b_2^{(0)}\left[t\beta_1^{(n-1)}(t) + (1-t)\beta_2^{(n-1)}(t)\right] + \dots$$
$$+ b_{n-1}^{(0)}\left[t\beta_{n-2}^{(n-1)}(t) + (1-t)\beta_{n-1}^{(n-1)}(t)\right] + b_n^{(0)} t \beta_{n-1}^{(n-1)}(t)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \Big[\underbrace{b_i^{(0)}(1-t) + b_{i+1}^{(0)} t}_{=:\, b_i^{(1)}}\Big] \beta_i^{(n-1)}(t)$$

d.h. wir haben nun $n$ neue Koeffizienten $b_i^{(1)}$ für ein Polynom vom Grad $n$

Allgemein:

Gegeben $b_i^{(0)} = b_i$ $\qquad k=0,\ 0 \le i \le n$

Setze $b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)}(1-t) + b_{i+1}^{(k-1)} t \qquad 0 < k \le n,\ 0 \le i \le n-k$

Die Auswertung von $B(t)$ erfolgt in einer ähnlichen Struktur wie beim Neville-Verfahren zur Auswertung von Polynomen:

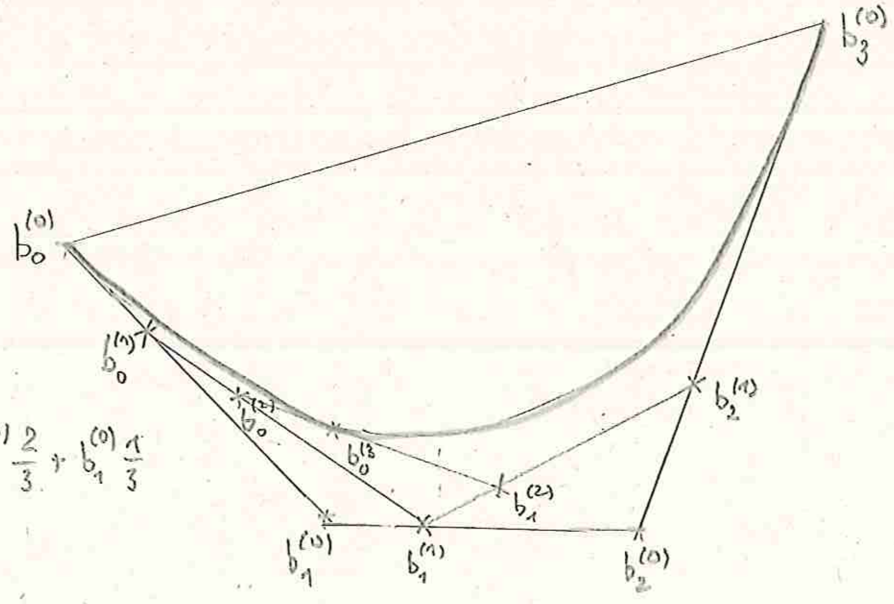
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \boxed{k=0} & \boxed{k=1} & \boxed{k=2} & & \boxed{k=n-1} & \boxed{k=n} \\
b_0 = & b_0^{(0)} \arrow[r] & b_0^{(1)} \arrow[r] & b_0^{(2)} & \arrow[r] & b_0^{(n-1)} \arrow[r] & b_0^{(n)} \\
b_1 = & b_1^{(0)} \arrow[r] \arrow[ur] & b_1^{(1)} \arrow[r] \arrow[ur] & b_1^{(2)} & \arrow[r] \arrow[ur] & b_1^{(n-1)} \arrow[ur] & \\
b_2 = & b_2^{(0)} \arrow[ur] & & \arrow[u] & \arrow[ur] & & \\
\vdots & & \arrow[r] & b_{n-2}^{(2)} & & & \\
\vdots & \arrow[r] & b_{n-1}^{(1)} \arrow[ur] & & & & \\
b_n = & b_n^{(0)} \arrow[ur] & & & & &
\end{tikzcd}$$

Und damit gilt dann $B(t) = b_0^{(n)} \underbrace{\beta_0^{(0)}(t)}_{\substack{=1 \\ \text{für alle } t}} = b_0^{(n)}$

Geometrisch interpretiert man das folgendermaßen (Bernstein-Kurve aus Beispiel 5.14)

Beispiel 5.15 (Forts. von Bsp. 5.14)

$t = 1/3$




$b_0^{(1)} = b_0^{(0)} \frac{2}{3} + b_1^{(0)} \frac{1}{3}$