# 8 Iterative Lösung von Gleichungssystemen



In diesem Abschnitt betrachten wir die Lösung von algebraischen Gleichungen

$$f(x) = 0 \qquad \text{mit} \qquad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Dabei beschränken wir uns zunächst auf den Fall $n=1$ (skalar).

## Intervallschachtelung

Idee: Angenommen man kennt ein Teilintervall $[a_0, b_0]$ so dass $f(a_0) f(b_0) < 0$ (unterschiedliche Vorzeichen) und $f$ sei stetig.
Dann hat $f$ nach dem Zwischenwertsatz mind. eine Nullstelle in $[a_0, b_0]$.


Algorithmus:

```
Geg. I_0 = [a_0, b_0] mit f(a_0) f(b_0) < 0 und ε > 0
t = 0;
while ( b_t - a_t > ε ) {
    x_t = (a_t + b_t)/2;
    if (f(x_t) == 0) {
        a_t = x_t - ε;  b_t = x_t;
    } else if ( f(a_t)·f(x_t) < 0 ) {
        a_{t+1} = a_t ;  b_{t+1} = x_t ;      // Nullstelle in [a_t, x_t]
    } else {
        a_{t+1} = x_t ;  b_{t+1} = b_t ;      // a ist f(x_t) f(b_t) < 0 da
                                              //   Vz von f(a_t) = Vz von f(x_t)
    }
    t = t+1;
}
```

Analyse:

Es gilt $a_t \leq a_{t+1} < b_{t+1} \leq b_t$

und $|b_{t+1} - a_{t+1}| \leq \frac{1}{2} |b_t - a_t| = \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} |b_0 - a_0|$

(solange nicht $f(x_t) = 0$).

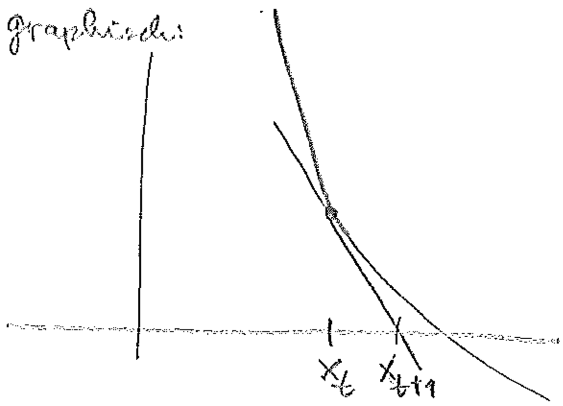
Bemerkung:

- Konvergenz ist linear mit Rate $\frac{1}{2}$.
- Sehr gut geeignet für monotone Funktionen → globale Konvergenz
- nur für reelle Funktionen im $\mathbb{R}^1$ geeignet.

## 7.1 Newton Verfahren

Die Funktion sei (mindestens) einmal stetig differenzierbar.

Idee: graphisch:




geg. $x_t$. Da $f \in C^1$ gibt es „Tangente"

$$T_t(x) = f'(x_t)(x - x_t) + f(x_t)$$

Nullstelle der Tangente:

$$T_t(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)}$$

Dies führt zur Iterationsvorschrift

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)}.$$

Offensichtlich ist $|f'(x_t)| > 0$ erforderlich, d.h. wir setzen voraus, dass die Nullstelle einfach ist.

Das Newton-Verfahren lässt sich auf Systeme $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erweitern:

Es existiere die Taylorentwicklung von $f$.:

$$f_i(x) = f_i(x_t + \Delta x) = f_i(x_t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_t)\,\Delta x_i + R_i(x_t, \Delta x) \quad i = 1, \dots, n$$

in vektorieller Schreibweise

$$f(x_t + \Delta x) = f(x_t) + J(x_t)\,\Delta x + R(x_t, \Delta x)$$

$$(J(x_t))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_t) \quad \text{„Jacobimatrix"}$$

Ignorieren des Restgliedes entspricht „Linearisierung von $f$".

$$\overbrace{f(x_t) + J(x_t)\,\Delta x}^{\approx f(x) = f(x_t + \Delta x)} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta x = -J^{-1}(x_t)\, f(x_t)$$

führt zur Iteration

$$x_{t+1} = x_t - J^{-1}(x_t)\, f(x_t)$$

Jeder Schritt erfordert Lösung eines LGS mit der Jacobimatrix!

Nun untersuchen wir die Konvergenz des Newton-Verfahrens. Allerdings nur im $\mathbb{R}^1$.

## Satz 7.1 (Newton-Verfahren)

Die Fkt $f \in C^2[a,b]$ habe in $(a,b)$ (Inneren!) eine Nullstelle $z$ und es sei

$$m := \min_{a \le x \le b} |f'(x)| > 0, \qquad M := \max_{a \le x \le b} |f''(x)|.$$

Es sei $\rho > 0$ so gewählt, dass

$$q := \frac{M}{2m}\rho < 1 \quad , \quad K_\rho(z) := \{ x \in \mathbb{R} : |x - z| \le \rho \} \subset [a,b]$$

Dann sind für jeden Startwert $x_0 \in K_\rho(z)$ die Newton-Iterierten $x_t \in K_\rho(z)$ definiert und konvergieren gegen die Nullstelle $z$.

Dabei gilt die a-priori Fehlerabschätzung

$$|x_t - z| \le \frac{2m}{M} q^{(2^t)} \quad , \quad t \in \mathbb{N}$$

a-priori: nur Abh. von den Voraussetzungen

Und die a-posteriori Fehlerabschätzung

a-posteriori: auch Abh. von bereits berechneten Iterierten.

$$|x_t - z| \le \frac{1}{m} |f(x_t)| \le \frac{M}{2m} |x_t - x_{t-1}|^2, \quad t \in \mathbb{N}.$$

**Beweis:** Vorbereitungen

i) Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert für alle $x, y \in [a,b]$, $x \ne y$:

$$\left| \underbrace{\frac{f(x) - f(y)}{x - y}}_{\text{Steigung}} \right| = |f'(\xi)| \underset{\text{Vor.}}{\ge} m \iff |x - y| \le \frac{1}{m} |f(x) - f(y)|$$

umgedreht wie bei L-stetig!

- ~~f ist Lipschitz-stetig~~ ~~folglich, das ist die andere Richtung~~.
- die Nullstelle $z$ ist eindeutig, da sonst $0 < |z_1 - z_2| \le \frac{1}{m} |\underset{0}{f(z_1)} - \underset{0}{f(z_2)}| = 0$ ↯

ii) Da $f \in C^2[a,b]$ gilt folg. Taylordarstellung:

$$f(y) = f(x) + (y - x) f'(x) + \underbrace{\int_x^y (x - t) f''(t)\, dt}_{=: R(y;x)} \quad \text{Restglied}$$

$f(x + (y - x)) = \ldots$

Transformation des Integrals mittels

$t = \varphi(s) = x + s(y-x) \qquad \varphi: [0,1] \to [x,y]$

liefert für das Restglied

$$R(y;x) = \int_x^y (x-t) f''(t)\,dt = \int_0^1 (x-\varphi(s)) f''(\varphi(s))\, \varphi'(s)\,ds$$

$$= \int_0^1 (\underbrace{x-x}_{=0} - s(y-x)) f''(x+s(y-x))\,(y-x)\,ds$$

$$= -(y-x)^2 \int_0^1 s\, f''(x+s(y-x))\,ds.$$

Und damit

$$|R(y;x)| \le (y-x)^2 \int_0^1 s \underbrace{|f''(x+s(y-x))|}_{\le M \text{ n. Vor}}\,ds \le \frac{M}{2}|y-x|^2.$$

iii) Nun setze $g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ (d.h. $x_{t+1} = g(x_t)$) „Fixpunktform"

Dann gilt:

$$g(x) - z = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - z = -\frac{1}{f'(x)} \underbrace{\{f(x) + (z-x)f'(x)\}}_{= -R(z;x)}$$

wg $\underbrace{0 = f(z)}_{=0} = \underbrace{f(x) + (z-x)f'(x)}\, + R(z;x)$

Für $\overbrace{x \in K_\varrho(z)}^{\text{d.h. } |x-z| \le \varrho}$ gilt dann

$$|g(x)-z| = \left|\frac{1}{f'(x)} R(z;x)\right| \le \frac{1}{m}\frac{M}{2}|z-x|^2 = \underbrace{\frac{M}{2m}\underbrace{|x-z|}_{\le\varrho}}_{<1 \text{ n. Wahl von } \varrho} \underbrace{|x-z|}_{\le \varrho \text{ da } x \in K_\varrho(z)} < \varrho \quad (*)$$

wg $<1$

$|f'(x)| \ge m \iff \frac{1}{m} \ge \frac{1}{|f'(x)|}$

min. macht es größer

Somit folgt aus $x \in K_\varrho(z)$, dass auch $g(x) \in K_\varrho(z)$.
$g$ bildet die Menge $K_\varrho(z)$ auf sich selbst ab.

Die Newton-Iteration wird $x_{t+1} = g(x_t)$.

Setze $\varrho_t := \frac{M}{2m}|x_t - z|$, Dann gilt mit der Absch. von oben

$$\varrho_t = \frac{M}{2m}|x_t - z| = \frac{M}{2m}\underbrace{|g(x_{t-1}) - z|}_{} \overset{(*)}{\leq} \frac{M}{2m}\frac{M}{2m}|x_{t-1} - z|^2 = \varrho_{t-1}^2$$

Somit gilt nach $t$ Schritten:

$$\varrho_t \leq \varrho_{t-1}^2 \leq \varrho_{t-2}^4 \ldots \leq \varrho_{\underbrace{t-t}_{=0}}^{(2^t)} = \varrho_0^{(2^t)}$$

Und damit wegen $|x_t - z| = \frac{2m}{M}\varrho_t$ und $\varrho_0 = \frac{M}{2m}\underbrace{|x_0 - z|}_{\leq \delta} \leq q < 1$

$$|x_t - z| = \frac{2m}{M}\varrho_t \leq \frac{2m}{M}\varrho_0^{(2^t)} \leq \frac{2m}{M}q^{(2^t)}$$

was zu zeigen war.

A-posteriori Abschätzung folgt aus Taylor-Formel für $x_t, x_{t-1}$

$$f(x_t) = \underbrace{f(x_{t-1}) + (x_t - x_{t-1})f'(x_t)}_{=0 \text{ nach Konstruktion!}} + R(x_t; x_{t-1})$$

Und

$$|x_t - z| \underset{(i)}{\leq} \frac{1}{m}|f(x_t) - \underbrace{f(z)}_{=0}| = \frac{1}{m}|R(x_t; x_{t-1})| \leq \frac{M}{2m}|x_t - x_{t-1}|^2.$$

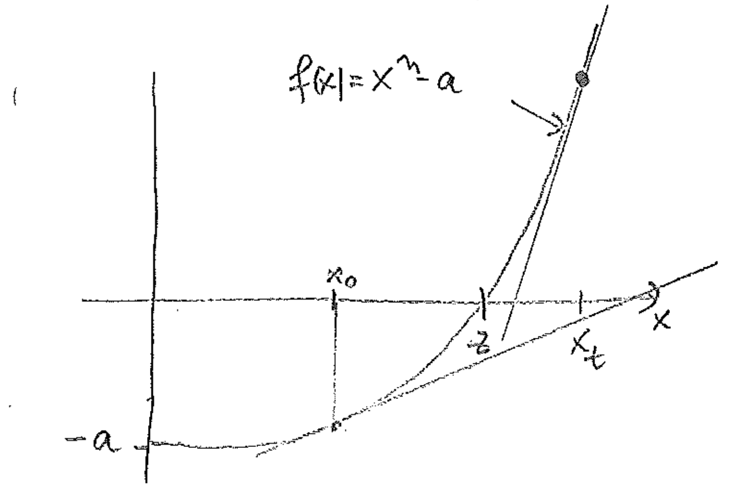
$\boxtimes$

Beispiel 8.2 (Wurzelberechnung mit Newton-Verfahren)

$a>0,\ n\geq 1$, löse $x^n = a \iff f(x) = x^n - a = 0,\ f'(x) = n x^{n-1}$

Also
$$x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)} = x_t - \frac{x_t^n - a}{n x_t^{n-1}} = \frac{n x_t^n - x_t^n + a}{n x_t^{n-1}} = \frac{(n-1)(x_t^n) + a}{n x_t^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{n}\left\{ (n-1) x_t + \frac{a}{x^{n-1}} \right\}$$

Satz 8.1 behauptet: Iteration konvergiert, falls $x_0$ nahe genug an $z$.
Hier gilt jedoch: Iteration konvergiert global, d.h. für alle $x_0 > 0$.
Aber nicht unbedingt quadratisch von Beginn an




1) für $x_t > z$ gilt
$$|x_{t+1} - z| < |x_t - z|$$
da $f(x_t) > 0$ und $f'(x_t) > \frac{f(x)}{x_t - z}$

2) $0 < x_0 < z$
dann ist $x_1 > z$
da $f(x_0) < 0$ und $f'(x_0) < \frac{-f(x_0)}{z - x_0}$.

Man zeigt: für $n=2$ ist für $|x_0 - \sqrt{a}| \leq 2\sqrt{a}$ die Konvergenz quadratisch.

Bemerkungen zum Newton-Verfahren.

- Das Newton-Verfahren konvergiert nur lokal, d.h. wenn $|x_0 - z| \leq \varrho$, → „Einzugsbereich". Wobei
  - -- $\varrho$ i.d.R. unbekannt
  - -- $\varrho$ möglicherweise sehr klein ist. Oben: $\frac{M}{2m}\varrho < 1$
    $\Rightarrow \varrho < \frac{2m}{M}$, $m <$ min $f'$, $M <$ max $f'$
- Newton-Verfahren konvergiert quadratisch.
  $|x_t - z| \leq c\,|x_{t-1} - z|^2$. zum Vgl Intervallsch.: $|x_t - z| \leq \frac{1}{2}|x_{t-1} - z|^1$
- gedämpftes Newton-Verfahren: Verbesserung der Konvergenz außerhalb des Einzugsbereichs:
$$x_{t+1} = x_t - \lambda_t \frac{f(x_t)}{f'(x_t)}, \quad \lambda_t \in (0,1]$$
Wahl von $\lambda_t$ „Dämpfungsstrategie".

- Mehrfache Nullstellen

Sei $z$ zunächst zweifache Nullstelle, d.h. $f(z) = f'(z) = 0$ und $f''(z) \neq 0$.

Wegen

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)} = x_t - \frac{f(x_t) - \overset{0}{f(z)}}{f'(x_t) - \underset{0}{f'(z)}} \overset{\text{Erweitern}}{=} x_t - \frac{\frac{f(x_t)-f(z)}{x_t - z}}{\frac{f'(x_t)-f'(z)}{x_t-z}} = x_t - \frac{f'(\xi_t)}{f''(\eta_t)}$$

Zwischenstelle

und $f''(z) \neq 0$ bleibt die Iteration für $x_t \to z$ (und damit $\eta_t \to z$) wohldefiniert.

Man zeigt: Für p-fache Nullstelle zeigt

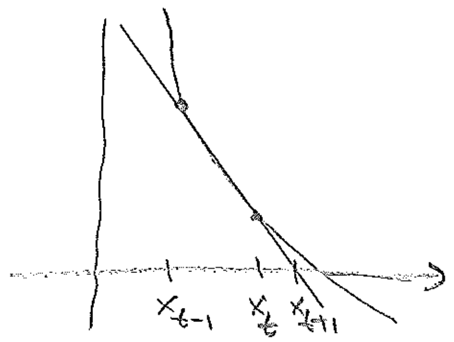
$$x_{t+1} = x_t - p\,\frac{f(x_t)}{f'(x_t)}$$

quadratische Konvergenz.

- Sekanten-Methode

Berechnung der Ableitung unter Umständen teuer.

Idee: Ersetze Tangente durch eine Sekante




$$s(x) = f(x_t) + (x - x_t)\,\frac{f(x_t) - f(x_{t-1})}{x_t - x_{t-1}}$$

Ansatz

$$s(x) \overset{!}{=} 0$$

führt auf Iteration

$$x_{t+1} = x_t - f(x_t)\,\frac{x_t - x_{t-1}}{f(x_t) - f(x_{t-1})}$$

Konvergenz: lokal mit

$$|x_t - z| \leq \frac{2m}{M}\, q^{\gamma_t}, \quad t \in \mathbb{N} \qquad \gamma_0 = \gamma_1 = 1, \quad \gamma_{t+1} = \gamma_t + \gamma_{t-1}$$

„Fibonacci zahlen"

Nur eine f-Auswertung pro Iteration notwendig

$\gamma_t \sim 0{,}723 \cdot (1{,}618)^t$ : Konvergenzordnung 1,618 also zw. 1 u. 2

Problem: Auslöschung in $\dfrac{x_t - x_{t-1}}{f(x_t) - f(x_{t-1})}$

## ~~7~~8.2 Sukzessive Approximation

Mit $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ hat das Newton-Verfahren die Form

$$x_{t+1} = g(x_t).$$

Da die Nullstelle $z$ wg $f(z)=0$ $\to g(z)=z$ einen Fixpunkt der Iteration $x_{t+1} = g(x_t)$ ist nennt man das auch Fixpunktiteration.

Hier untersuchen wir nun allgemeine Iterationen dieser Art.

Z. B. könnte die Berechnung von $f'(x)$ sehr teuer sein und man wertet $f'$ nur einmal „in der Nähe" von $z$ aus:

$$x_{t+1} = x - \frac{f(x)}{f'(c)}.$$

Frage: Wann konvergiert so eine Iteration? Insbesondere wollen wir auch $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zulassen.

Antwort gibt der sog. „Banachsche Fixpunktsatz".

**Satz ~~7~~8.3 (Sukzessive Approximation)**

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene Punktmenge und $g: G \to G$ Lipschitz-stetig mit Konstante $q < 1$, d. h.

$$\| g(x) - g(y) \| \leq q \, \| x - y \|.$$

Hierbei ist $\| . \|$ eine Vektornorm im $\mathbb{R}^n$ und $g$ nennt man eine „Kontraktion". Dann existiert genau ein Fixpunkt $z \in G$ von $g$ und für jeden Startpunkt $x^{(0)} \in G$ konvergiert die Folge der Iterierten $x^{(t+1)} = g(x^{(t)})$ gegen $z$.

Es gelten die a posteriori und a ~~priori~~ posteriori Fehlerabschätzungen

$$\| x^{(t)} - z \| \leq \frac{q}{1-q} \| x^{(t)} - x^{(t-1)} \| \leq \frac{q^t}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|.$$

(Wir schreiben den Iterationsindex oben in Klammer damit bei Vektoren unten Platz für den Komponentenindex bleibt).

Beweis:

i) Da $g: G \to G$ ist $x^{(t)} = g(x^{(t-1)}) = g(g(x^{(t-2)})) = \ldots = \underbrace{g(\ldots g}_{t\text{-mal}}(x^{(0)})\ldots)$

wohldefiniert.

ii) Weiter ist

$$\|x^{(t+1)} - x^{(t)}\| = \|g(x^{(t)}) - g(x^{(t-1)})\| \leq q\,\|x^{(t)} - x^{(t-1)}\|$$
$$\vdots$$
$$\leq q^t\,\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

iii) Zeige nun, dass die $x^{(t)}$ eine Cauchy-Folge bilden.

Sei $m \geq 1$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Es ist

$$\|x^{(t+m)} - x^{(t)}\| \leq \|\underbrace{x^{(t+m)} - x^{(t+m-1)}} + \underbrace{x^{(t+m-1)} - x^{(t+m-2)}} + \ldots + \underbrace{x^{(t+1)} - x^{(t)}}\|$$

Dreiecksungl. $\to \leq \|x^{(t+m)} - x^{(t+m-1)}\| + \|x^{(t+m-1)} - x^{(t+m-2)}\| + \ldots + \|x^{(t+1)} - x^{(t)}\|$

(ii) $\to \leq q^{t+m-1}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| + q^{t+m-2}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| + \ldots + q^t\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

Ausklammern $\to = (q^{t+m-1} + q^{t+m-2} + \ldots + q^t)\,\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

geom. Reihe $\to \leq q^t\,\dfrac{1-q^m}{1-q}\,\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leq \varepsilon$ für $t \geq t(\varepsilon)$ hinreichend groß.

$\mathbb{R}^n$ ist vollständig, jede Cauchy-Folge konvergiert.

Also existiert $z = \lim_{t\to\infty} x^{(t)}$ und $z \in G$, da $G$ abgeschlossen.

Schließlich ist $z = g(z)$. (Dies zeigt man so:

$$\|z - g(z)\| \overset{t\text{ bel.}}{=} \|z - x^{(t)} + x^{(t)} - g(z)\|$$
$$\leq \underbrace{\|z - x^{(t)}\|}_{\to 0 \text{ für } t\to\infty} + q\,\underbrace{\|x^{(t-1)} - z\|}_{\to 0 \text{ für } t\to\infty} \to 0$$

iv) Fehlerabschätzung

$\|x^{(t+m)} - x^{(t)}\|$

$$\leq \|x^{(t+m)} - x^{(t+m-1)}\| + \ldots + \|x^{(t+1)} - x^{(t)}\| \quad \text{(wie oben)}$$
$\downarrow$ m mal
$$\leq q^m\,\|x^{(t)} - x^{(t-1)}\| + \ldots + q\,\|x^{(t)} - x^{(t-1)}\|$$
$$= \underbrace{(q^m + q^{m-1} + \ldots + q)}_{\text{absch. durch geom. Reihe}}\,\|x^{(t)} - x^{(t-1)}\| \leq \frac{q}{1-q}\,\|x^{(t)} - x^{(t-1)}\|$$

Für $m \to \infty$ gilt $x^{(t+m)} \to z$, rechte Seite ist unabh. von $m$, also

$$\|z - x^{(t)}\| \leq \frac{q}{1-q}\,\|x^{(t)} - x^{(t-1)}\| \leq \underbrace{\frac{q}{1-q}\,q^{t-1}}_{=\frac{q^t}{1-q}}\,\|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

Kann man benutzen, um Abstand zur exakten Lösung zu schätzen

∎

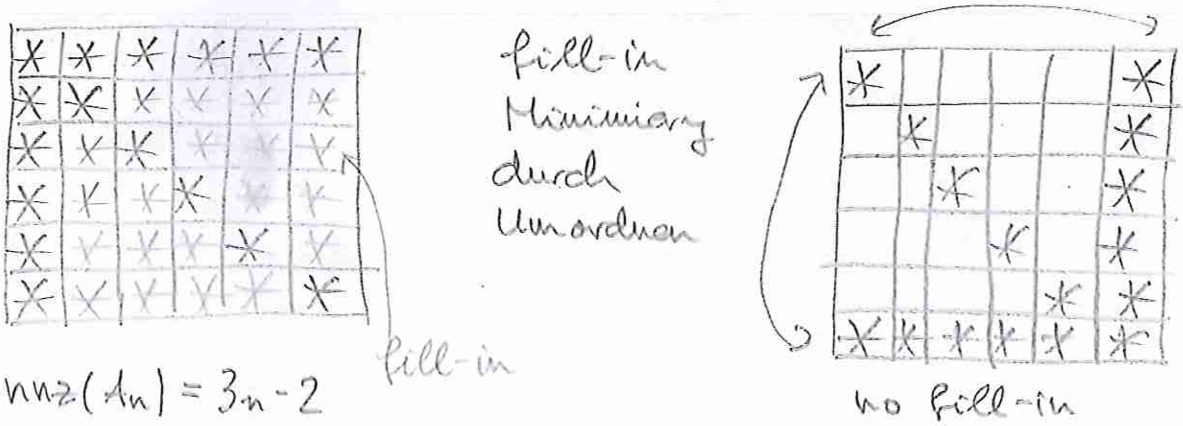
## 7.3 Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Wir kehren zurück zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n. \quad A \text{ sei regulär.}$$

**Definition 7.4** Eine Menge von Matrizen $\{A^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ heißt dünn besetzt falls $|\{a_{ij}^{(n)} \mid a_{ij}^{(n)} \neq 0\}| = nnz(A^{(n)}) = \mathcal{O}(n)$. ☒

Gauß-Elimination ist für dünn besetzte Matrizen oft schlecht geeignet aufgrund von „fill-in".




Lösen von $Ax = b \iff$ „Nullstellensuche" $f(x) = b - Ax = 0$.

Definiere Iteration

$$\begin{aligned} x^{(t+1)} = g(x^{(t)}) &= x^{(t)} + C^{-1} f(x^{(t)}) \\ &= x^{(t)} + C^{-1}(b - Ax^{(t)}) \\ &= \underbrace{(I - C^{-1}A)}_{=:B \text{ „Iterationsmatrix"}} x^{(t)} + C^{-1}b \end{aligned}$$

Für $x := A^{-1}b$ gilt

$$g(x) = (I - C^{-1}A)\underbrace{A^{-1}b}_{x} + C^{-1}b = A^{-1}b - C^{-1}b + C^{-1}b = A^{-1}b = x$$

Also $x$ Fixpunkt von $g$.

Für die Lipschitzkonstante der Funktion $g$ gilt

$$\|g(x)-g(y)\| = \|Bx + C^{-1}b - By - C^{-1}b\| = \|B(x-y)\|$$
$$\leq \|B\| \, \|x-y\|$$

Falls $\|B\| < 1$ ($\|.\|$ verträgliche Matrixnorm) ist $g$ Kontraktion auf $\mathbb{R}^n$.

Beispiele für Iterationsverfahren.

Setze $A = L + D + U$    $L$ strikte untere Dreiecksmatrix
$D$ Diagonalmatrix
$U$ obere Dreiecksmatrix

$C = D$, also $\quad x^{(t+1)} = x^{(t)} + D^{-1}(b - Ax^{(t)})$ „Jacobi-Verfahren"
$C = L + D$, also $\quad x^{(t+1)} = x^{(t)} + (L+D)^{-1}(b - Ax^{(t)})$ „Gauß-Seidel Verf."

Iterationsverfahren konvergieren in der Regel nur für bestimmte Klassen von Matrizen. Hier ein Beispiel.

Definition 8.5 Eine Matrix heißt strikt diagonaldominant falls

$$\sum_{j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Beispiel: Splines, Radiosity-Verfahren.

Satz 8.6 Das Jacobi-Verfahren konvergiert für strikt diagonaldominante Matrizen.

Beweis. $B = I - D^{-1}A$. Zeige $\|B\|_\infty < 1$ (Zeilensummennorm).

$$B = I - D^{-1}A = I - D^{-1}(L+D+U) = -D^{-1}(L+U)$$

$$\|B\|_\infty = \|D^{-1}(L+U)\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \left( \sum_{j\neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right) = \max_{i=1,\dots,n} \frac{1}{|a_{ii}|} \underbrace{\sum_{j\neq i} |a_{ij}|}_{\underset{\text{n. Vor.}}{<|a_{ii}|}} < 1.$$

∎

Es gibt viele weitere solche Aussagen für
sym. pos. def. Matrizen, schwach diagonaldom. Matrizen, M-Matrizen, ...

Aufwand für Iterationsverfahren

1) Aufwand für eine Iteration $x^{(t+1)} = x^{(t)} + C^{-1}(b - Ax^{(t)})$
sei $\alpha(n)$. Typischerweise $\alpha(n) = O(n)$.

2) $\| x^{(t)} - x \| \leq \|B\| \, \|x^{(t-1)} - x\|$

also $\| x^{(t)} - x \| \leq \|B\|^t \, \|x^{(0)} - x\|$

brauche $\|B\|^t \leq \varepsilon \iff \underbrace{t \log \underbrace{\|B\|}_{<1}}_{<0} \leq \log \underbrace{\varepsilon}_{<1} \iff t \geq \frac{\log \varepsilon}{\underbrace{\log \|B\|}_{>0}}$

Gesamtaufwand: $t \cdot \alpha(n) = \dfrac{\log \varepsilon}{\log \|B\|} \alpha(n)$

$\|B\|$ problemabhängig, je nach Verfahren auch von $n$ abhängig.

Es gibt Verfahren, die relevante Probleme (z.B. Rdermatrix) im <u>Gesamtaufwand</u> $O(n)$ lösen können!