# Inhalt





# Kurvenkompression in der Computergraphik

Die Lage eines starren Körpers im Raum wird durch sechs Zahlen festgelegt (drei für die Position und drei für die Orientierung).

Bewegt sich der Körper, so hängen diese sechs Zahlen von der Zeit ab, sind also Funktionen.

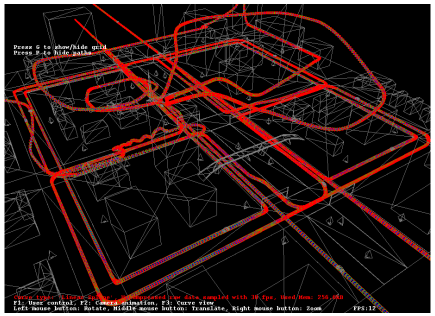
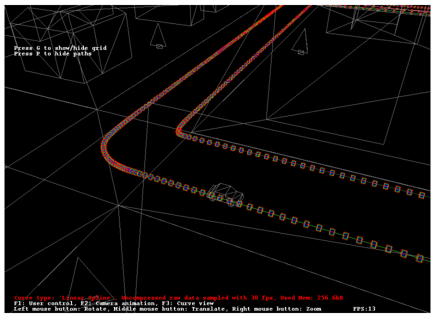
So wird in der folgenden computergenerierten Szene die Lage der bewegten Autos so beschrieben:




# Kurvenkompression in der Computergraphik

Im Computer wird die Kurve durch endlich viele Stützstellen repräsentiert.

Wählt man diese Stützstellen in gleichen (äquidistanten) Abständen so benötigt man relativ viele Stützpunkte um auch an den Stellen schneller Änderung gute Qualitität zu garantieren:

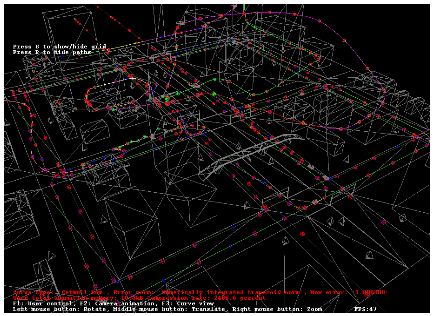
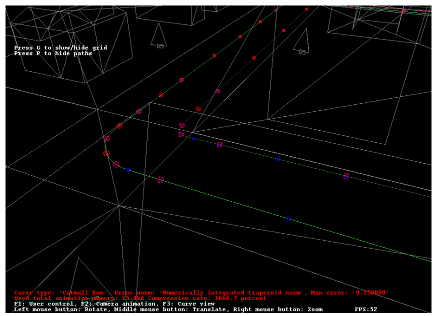


# Kurvenkompression in der Computergraphik

Ein schlaueres Verfahren verwendet eine adaptive Schrittweite.

Dabei will man mit möglichst wenig Stützstellen bei garantierter Fehlerschranke auskommen.

Diese kann man dann zur Datenkompression verwenden:

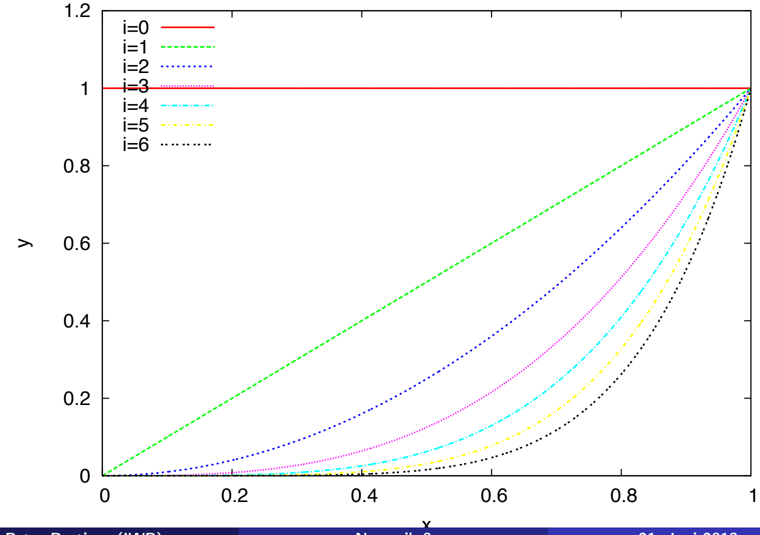
## Kurvenkompression in der Computergraphik

Diese tolle Anwendung haben Eric Schneider, Manuel Jerger und Benjamin Jillich im Rahmen eines Software-Praktikums im Sommersemester 2008 an der Universität Stuttgart erarbeitet! Vielen Dank!



## Monome bis zum Grad 6

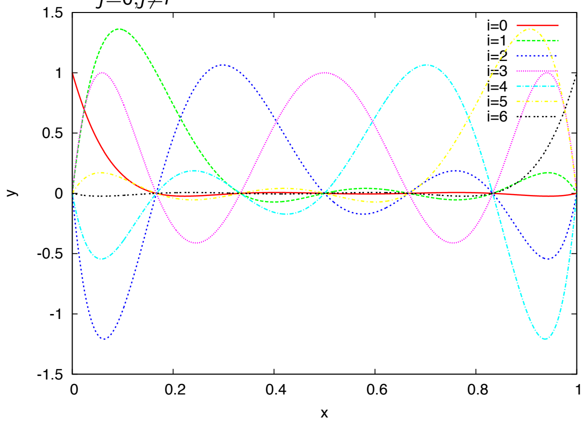
Die Monome $p_i(x) = x^i$ bis zum Grad 6 sieht man hier:






## Lagrange-Polynome

$$L_i^{(6)}(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad i = 0, \ldots, 6 \qquad x_i = \frac{i}{6}$$






## Beispiel zu den Lagrange-Polynomen

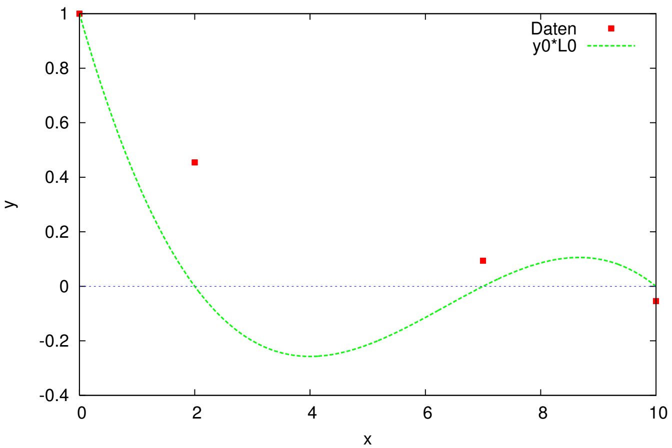
Zu interpolieren sei die folgende Wertetabelle mit 4 Einträgen:

| $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|
| 0 | 1.0000 |
| 2 | 0.4546 |
| 7 | 0.0938 |
| 10 | $-0.0544$ |

Betrachten wir nun die skalierten Lagrange-Polynome $y_i L_i^{(3)}$ sowie das Interpolationspolynom $p = \sum_{i=0}^{3} y_i L_i^{(3)}$.

# Beispiel zu den Lagrange-Polynome (Forts.)

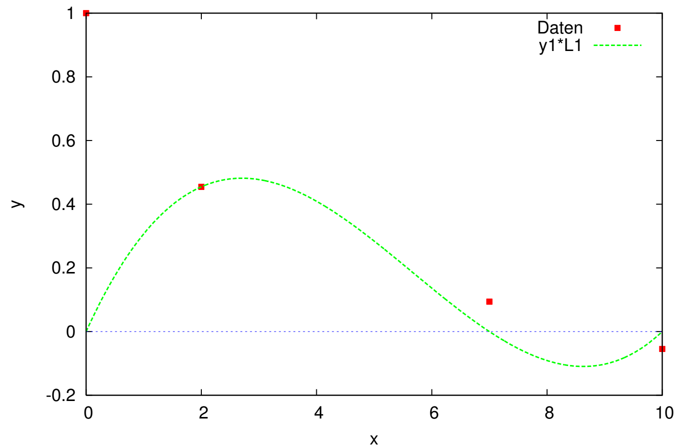
$$y_0 \cdot L_0^{(3)}(x) = 1.0000 \frac{x-2}{0-2}\frac{x-7}{0-7}\frac{x-10}{0-10} = \frac{-1}{140}\left(x^3 - 19x^2 + 104x - 140\right)$$






# Beispiel zu den Lagrange-Polynome (Forts.)

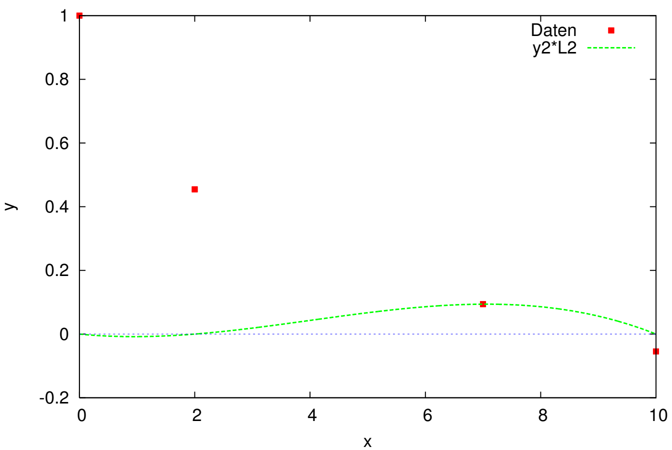
$$y_1 \cdot L_1^{(3)}(x) = 0.4546 \frac{x-0}{2-0}\frac{x-7}{2-7}\frac{x-10}{2-10} = \frac{0.4546}{80}\left(x^3 - 17x^2 + 70x\right)$$






# Beispiel zu den Lagrange-Polynome (Forts.)

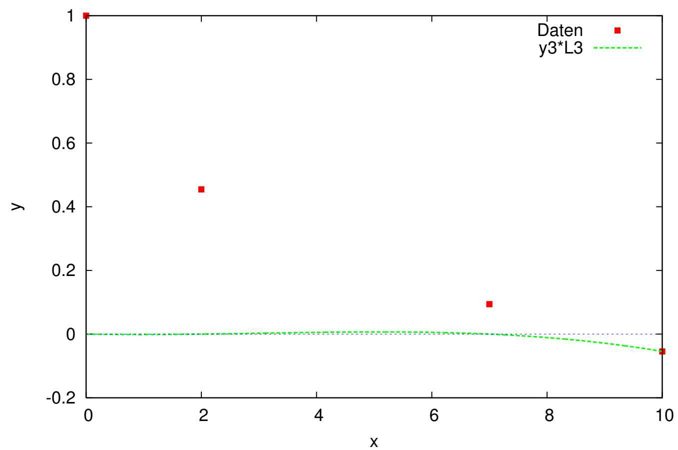
$$y_2 \cdot L_2^{(3)}(x) = 0.0938 \frac{x-0}{7-0}\frac{x-2}{7-2}\frac{x-10}{7-10} = \frac{-0.0938}{105}\left(x^3 - 12x^2 + 20x\right)$$





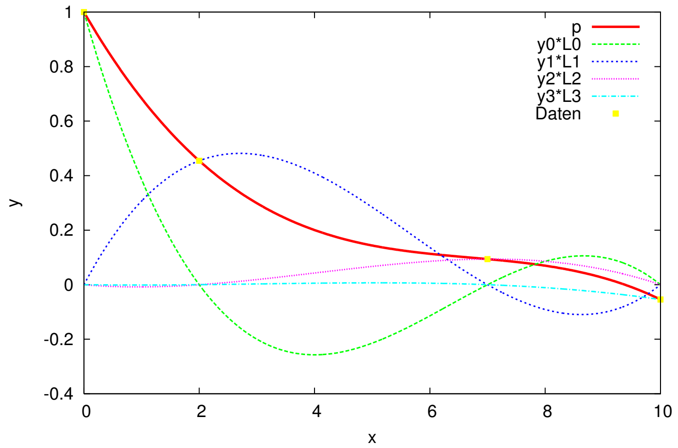

# Beispiel zu den Lagrange-Polynome (Forts.)

$$y_3 \cdot L_3^{(3)}(x) = -0.0544 \frac{x-0}{10-0}\frac{x-2}{10-2}\frac{x-7}{10-7} = \frac{-0.0544}{240}\left(x^3 - 9x^2 + 14x\right)$$



## Beispiel zu den Lagrange-Polynome (Forts.)

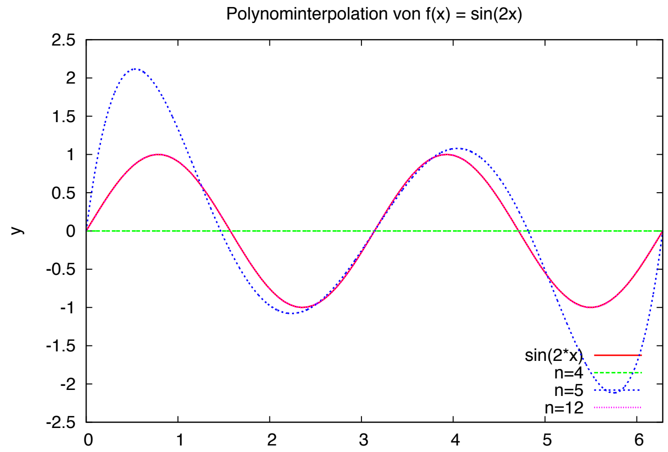
Interpolationspolynom $p(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i L_i^{(3)}(x)$






## Interpolation von $\sin(2x)$

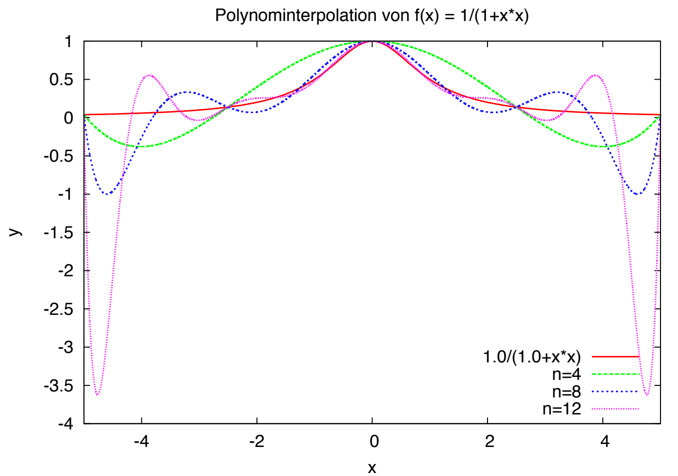
Interpolation der Funktion $\sin(2x)$ auf $[0, 2\pi]$ mit äquidistanten Stützstellen. Hier wird für steigenden Polynomgrad eine Verbesserung mit $n$ erzielt.






## Interpolation von $\frac{1}{1+x^2}$

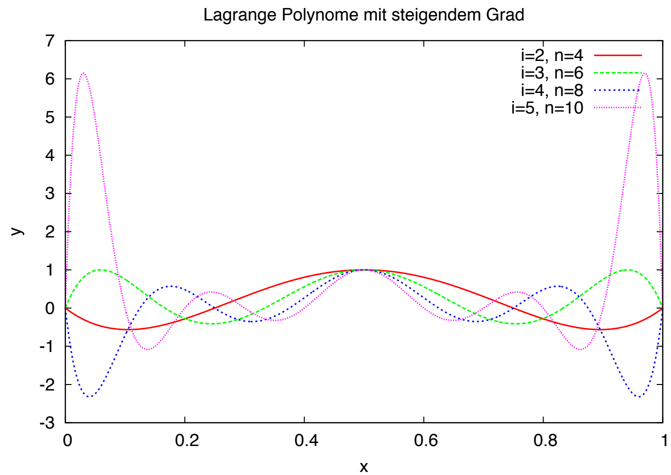
Interpolation der Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ auf $[-5, 5]$ mit äquidistanten Stützstellen.





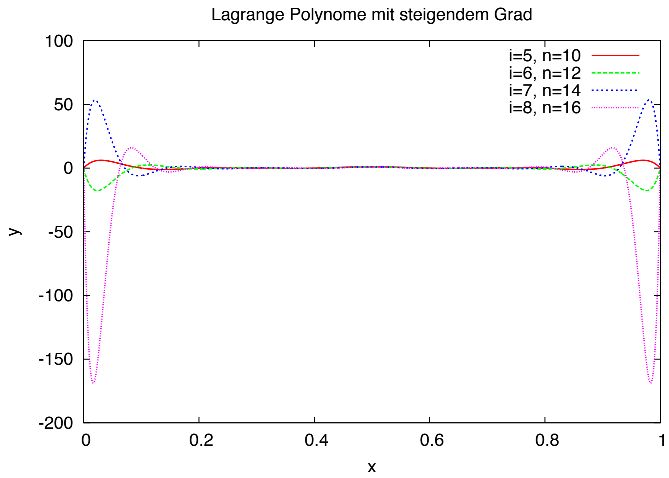

## Lagrange-Polynome mit steigendem Grad

Plot von $L_{n/2}^{(n)}$ für $n = 4, 6, 8, 10$.



# Lagrange-Polynome mit steigendem Grad

Plot von $L^{(n)}_{n/2}$ für $n = 10, 12, 14, 16$.




Am Rand wächst das Lagrange-Polynom exponentiell!



# Numerische Differentiation

## Beispiel 5.8 zur numerischen Differentiation

Wir wollen die zweite Ableitung von $f(x) = \sinh(x)$ für $x = 0.6$ mit dem zweiten Differenzenquotient ermitteln:

$$\frac{d^2}{dx^2}\sinh(x) \approx \frac{\sinh(x+h) - 2\sinh(x) + \sinh(x-h)}{h^2}$$

zur Erinnerung:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$
$$\frac{d}{dx}\sinh = \cosh = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\sinh(x) = \sinh(x).$$



# Numerische Differentiation (Forts.)

Mit `double` Genauigkeit erhält man den Wert

$$\sinh(0.6) = 6,366535821482 \cdot 10^{-1}.$$

Dagegen liefert die numerische Differentiation die folgende Tabelle

| $h$ | Differenzenquotient | | |
|---|---|---|---|
| $1 \cdot 10^{-1}$ | 6.371 | $\cdot 10^{-1}$ | |
| $1 \cdot 10^{-2}$ | 6.3665888 | $\cdot 10^{-1}$ | |
| $1 \cdot 10^{-3}$ | 6.366536352 | $\cdot 10^{-1}$ | |
| $1 \cdot 10^{-4}$ | 6.3665358540 | $\cdot 10^{-1}$ | |
| $1 \cdot 10^{-5}$ | 6.3665017 | $\cdot 10^{-1}$ | Auslöschung |
| $1 \cdot 10^{-6}$ | 6.3671 | $\cdot 10^{-1}$ | |
| $\vdots$ | | | |
| $1 \cdot 10^{-10}$ | 1.1102 | $\cdot 10^{4}$ | ! |

Numerische Differentation ist sehr anfällig gegenüber Rundungsfehlern. Mögliche Abhilfe bietet die „Extrapolation“. □



# Beispiel zu stückweisen Polynomen

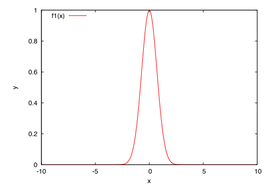
Wir betrachten die Interpolation der folgenden drei Funktionen

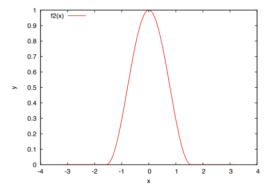
$$f_1(x) = \exp(-x^2) \quad \text{in } [-10, 10], \tag{8}$$

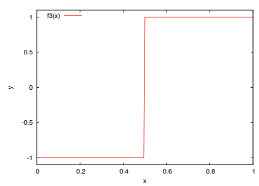
$$f_2(x) = \begin{cases} \cos^2(x) & |x| < \pi/2 \\ 0 & |x| \geq \pi/2 \end{cases} \quad \text{in } [-\pi, \pi], \tag{9}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} -1 & x < 1/2 \\ +1 & x \geq 1/2 \end{cases} \quad \text{in } [0, 1], \tag{10}$$

mittels Polynomen, $S_h^{1,0}$ und $S_h^{3,2}$ (mit natürlichen Randbedingungen).

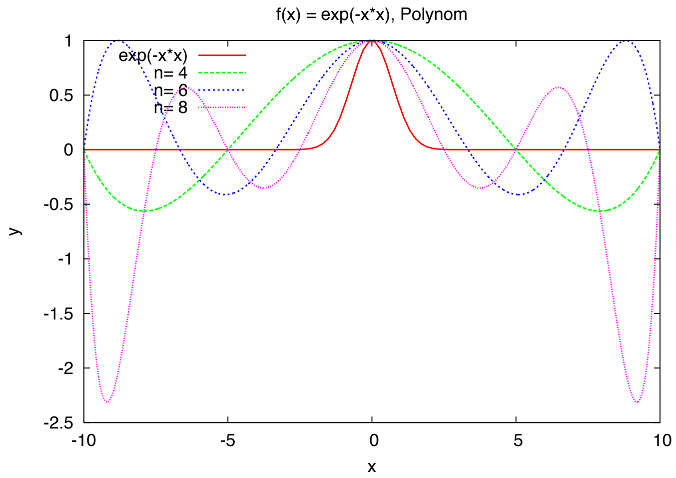






# Beispiel zu stückweisen Polynomen (Forts.)

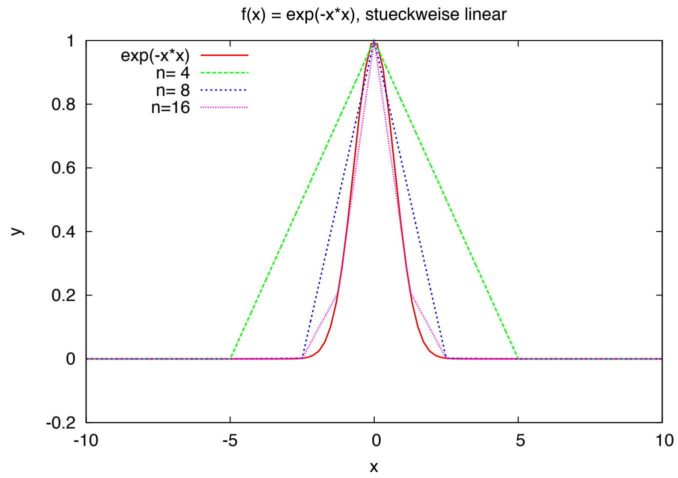
## $f_1(x)$ mit Lagrange-Polynomen






# Beispiel zu stückweisen Polynomen (Forts.)

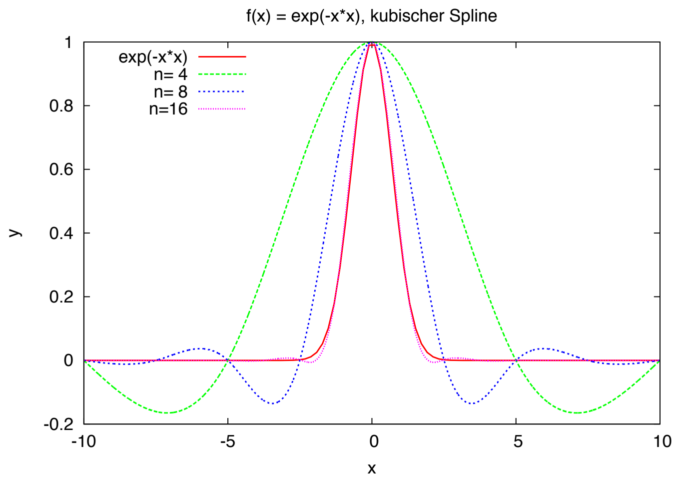
## $f_1(x)$ mit stückweise linearen Funktionen






# Beispiel zu stückweisen Polynomen (Forts.)

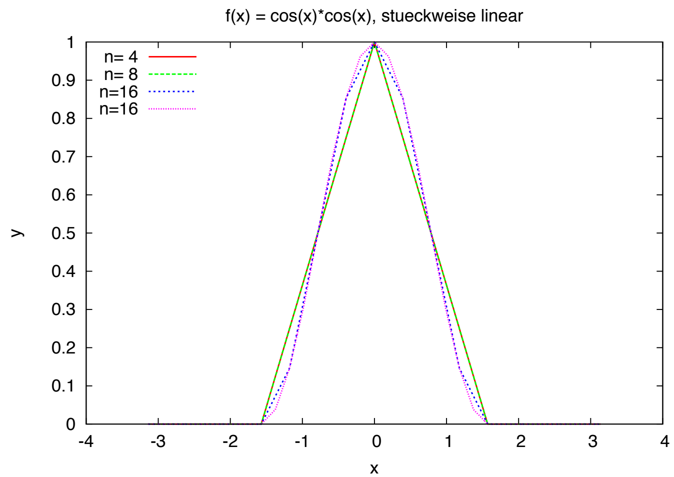
## $f_1(x)$ mit kubischen Splines





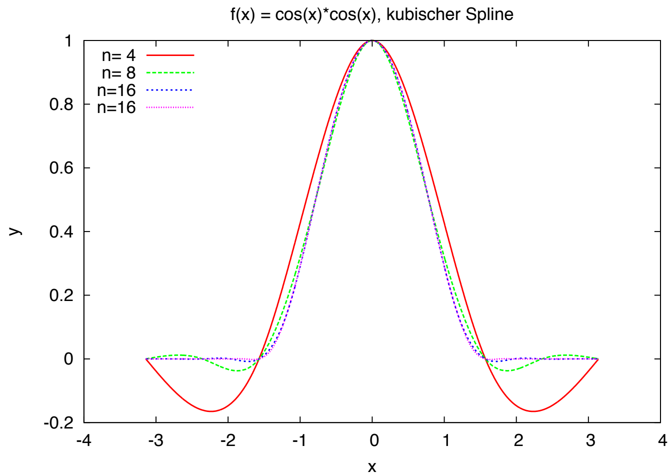

# Beispiel zu stückweisen Polynomen (Forts.)

## $f_2(x)$ mit stückweise linearen Funktionen



## Beispiel zu stückweisen Polynomen (Forts.)

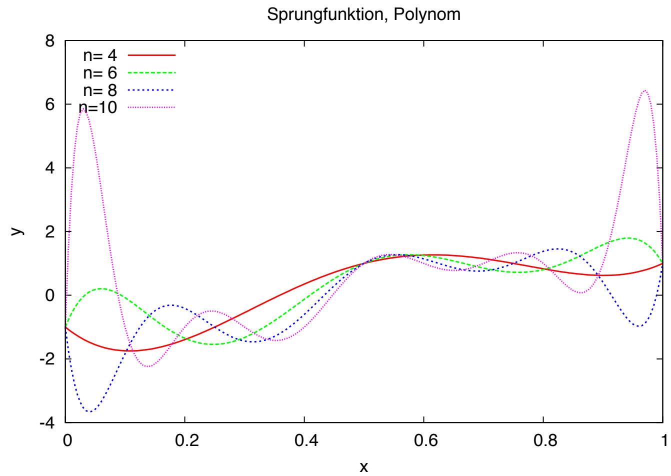
### $f_2(x)$ mit kubischen Splines






## Beispiel zu stückweisen Polynomen (Forts.)

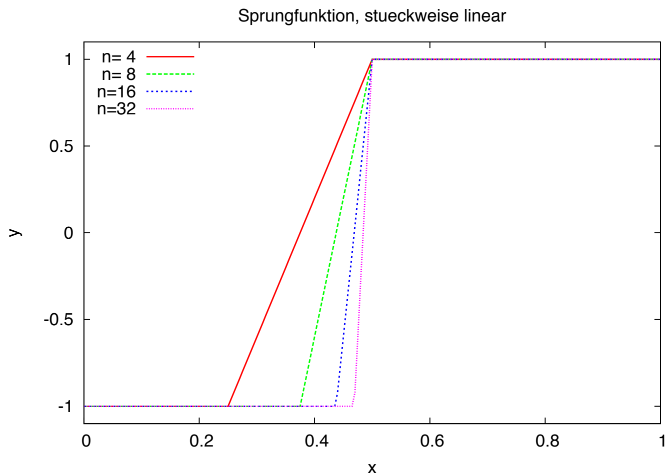
### $f_3(x)$ mit Lagrange-Polynomen






## Beispiel zu stückweisen Polynomen (Forts.)

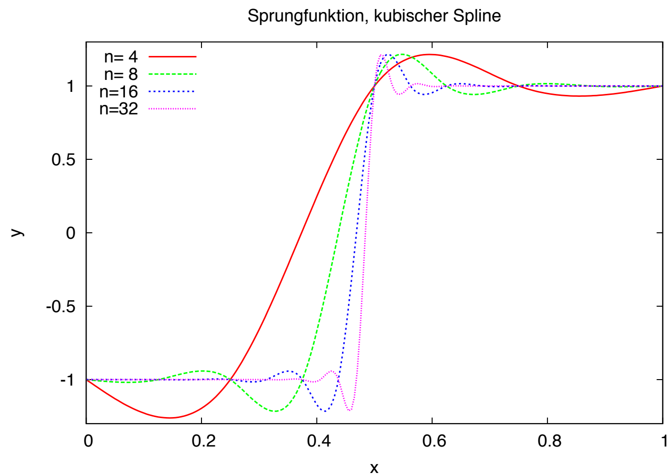
### $f_3(x)$ mit stückweise linearen Funktionen






## Beispiel zu stückweisen Polynomen (Forts.)

### $f_3(x)$ mit kubischen Splines



## Beispiel zu stückweisen Polynomen (Forts.)

Wir lernen:

- Interpolation mit Polynomen steigenden Grades an äquidistanten Stützstellen schlägt in allen Fällen fehl, d. h. der Interpolationsfehler steigt mit dem Grad an.
- Kubische Splines konvergieren und liefern einen glatten Verlauf. Allerdings kommt es zu möglicherweise „unphysikalischen“ Unter- bzw. Überschwingern. Diese sind aber im Falle von $f_3(x)$ um die Sprungstelle lokalisiert.
- Stückweise lineare Funktionen haben diesen Defekt nicht.

Wir wollen nun den Interpolationsfehler noch experimentell bestimmen.



## Beispiel zu stückweisen Polynomen (Forts.)

$f_1(x) = e^{-x^2}$

| $n$ | $S_h^{1,0}$ | $S_h^{3,2}$ | $P_n$ |
|---|---|---|---|
| 4 | $6.045_e - 01$ | $7.420_e - 01$ | $8.038_e - 01$ |
| 6 | $4.447_e - 01$ | $5.612_e - 01$ | $9.999_e - 01$ |
| 8 | $3.002_e - 01$ | $3.918_e - 01$ | $2.311_e + 00$ |
| 10 | $1.774_e - 01$ | $2.464_e - 01$ | $5.949_e + 00$ |
| 16 | $1.060_e - 01$ | $2.753_e - 02$ | |
| 32 | $6.946_e - 02$ | $7.083_e - 03$ | |
| 64 | $2.241_e - 02$ | $3.316_e - 04$ | |
| 128 | $5.974_e - 03$ | $1.918_e - 05$ | |
| 256 | $1.517_e - 03$ | $1.173_e - 06$ | |
| 512 | $3.809_e - 04$ | $7.289_e - 08$ | |
| 1024 | $9.533_e - 05$ | $4.549_e - 09$ | |

Angegeben ist der maximale Fehler an einem Punkt. Polynome konvergieren nicht. Stückweise linear konvergiert mit $h^2$ (d. h. $e_{2n}/e_n = (1/2)^2$), kubische Splines mit $h^4$ (d. h. $e_{2n}/e_n = (1/2)^4$).

In beiden Fällen gilt dies nur, wenn $n$ genügend groß, man spricht von „asymptotischer“ Konvergenz.



## Beispiel zu stückweisen Polynomen (Forts.)

$$f_2(x) = \begin{cases} \cos^2(x) & |x| < \pi/2 \\ 0 & |x| \geq \pi/2 \end{cases}$$

| $n$ | $S_h^{1,0}$ | $S_h^{3,2}$ |
|---|---|---|
| 4 | $1.052e - 01$ | $1.649e - 01$ |
| 8 | $1.052e - 01$ | $4.498e - 02$ |
| 16 | $3.518e - 02$ | $8.434e - 03$ |
| 32 | $9.423e - 03$ | $1.945e - 03$ |
| 64 | $2.396e - 03$ | $4.764e - 04$ |
| 128 | $6.015e - 04$ | $1.184e - 04$ |
| 256 | $1.505e - 04$ | $2.958e - 05$ |
| 512 | $3.764e - 05$ | $7.394e - 06$ |
| 1024 | $9.412e - 06$ | $1.848e - 06$ |

In diesem Fall konvergiert der maximale Fehler auch im Falle kubischer Splines nur mit $h^2$.

Dies liegt daran, dass $f_2''(x)$ unstetig am Punkt $x = \pi/2$ ist (springt von 2 auf 0).

Die dritte Ableitung existiert nicht mehr. □



## Merkregel

Für die Interpolation mit stückweisen Polynomen merken wir uns:

Je höher der (abschnittsweise) Polynomgrad umso schneller konvergiert das Verfahren. Im allgemeinen erhält man $O(h^{k+1})$ Konvergenz für Polynome vom Grad $k$.

Dies gilt allerdings nur dann, wenn die zu interpolierende Funktion genügend of differenzierbar ist. Ist dies nicht der Fall so lohnt also auch die Verwendung von Polynomen hohen Grades nicht. □

## Spektralanalyse

Mit der Diskreten Fourier-Analyse kann man ein periodisches Signal durch Sinus und Kosinusschwingungen unterschiedlicher Frequenzen darstellen.

Die Koeffizienten $a_k$, $b_k$ bilden das Spektrum des Signals. Man spricht auch von Zeit- und Frequenzbereich.

Dies hat unzählige Anwendungen in der sog. Signalverarbeitung.

So arbeitet das JPEG Verfahren zur Bildkompression mit einer diskreten Kosinustransformation (eine Variante der diskreten Fourier-Analyse, die nur mit reellen Werten rechnet) und Abschneiden im Frequenzbereich.

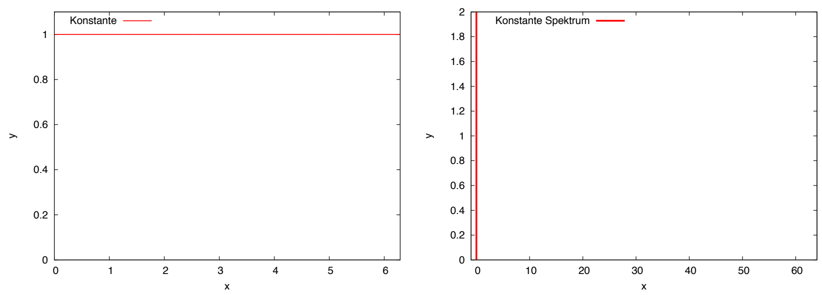
Einen Spektrumanalysator hat vielleicht auch schon jeder mal an einem Verstärker oder MP3-Player gesehen.

Wir wollen uns nun die Spektren zu einigen einfachen Signalen anschauen.



## Spektren einiger Funktionen (Konstante)

$$f(x) = 1$$



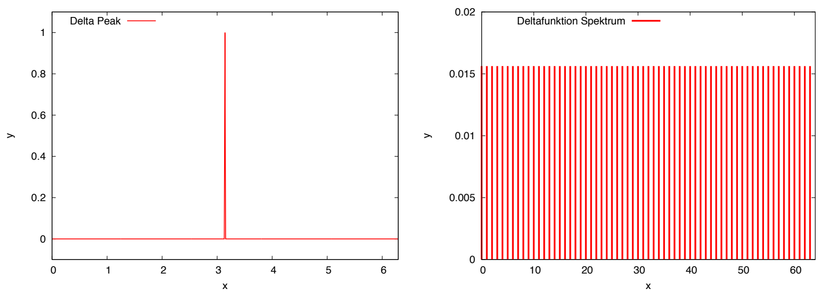

Die Konstante wird durch den Koeffizienten $a_0$ repräsentiert.

Bemerkung: Das rechte Bild zeigt $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$



## Spektren einiger Funktionen (Delta)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = \pi \\ 0 & x \neq \pi \end{cases}$$

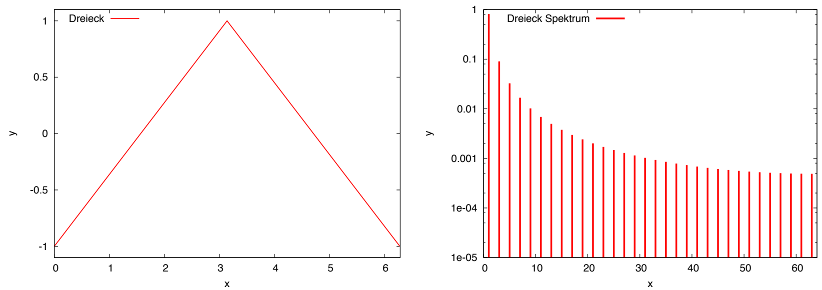



Ein einzelner Peak im Zeitbereich hat ein konstantes Spektrum.



## Spektren einiger Funktionen (Dreieck)

$$f(x) = \begin{cases} 2x/\pi - 1 & x \leq \pi \\ 1 - 2(x - \pi)/\pi & x > \pi \end{cases}$$

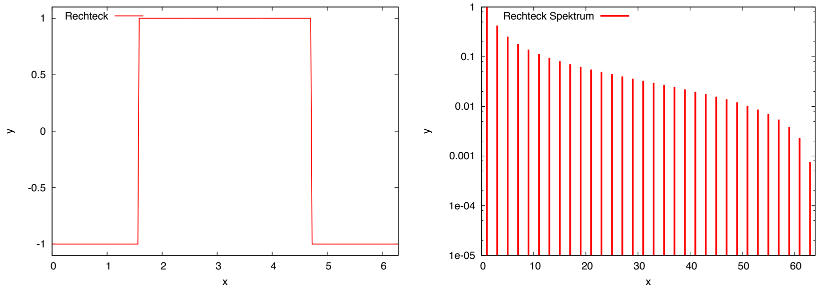



Man beachte die logarithmische Darstellung des Spektrums.

Die Koeffizienten zu *geraden* Indizes sind Null, da man nur $\cos \pi x, \cos 3\pi x, \cos 5\pi x, \ldots$ braucht.

# Spektren einiger Funktionen (Rechteck)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > \pi/2 \wedge x < 3\pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

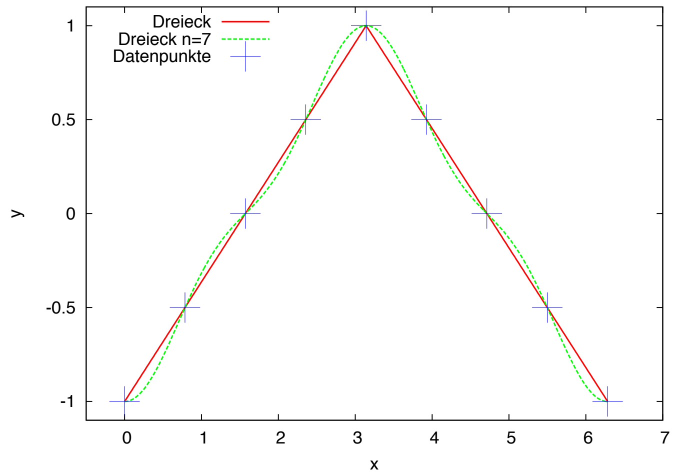



Man beachte die logarithmische Darstellung des Spektrums.



# Interpolation der Dreiecksfunktion

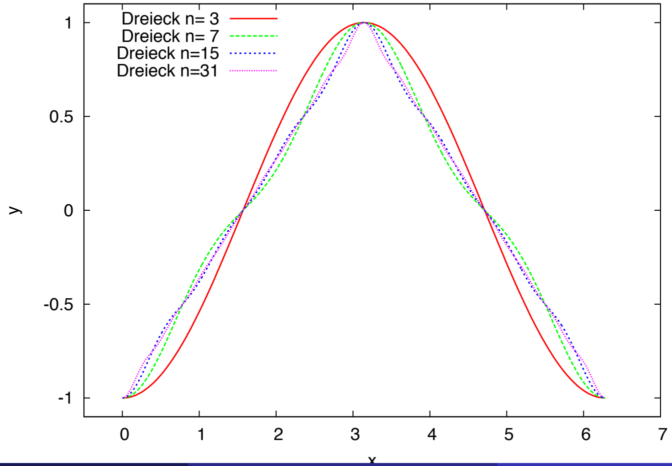
Folgende Abbildung zeigt die Einhaltung der Interpolationsbedingung:






# Approximation der Dreiecksfunktion

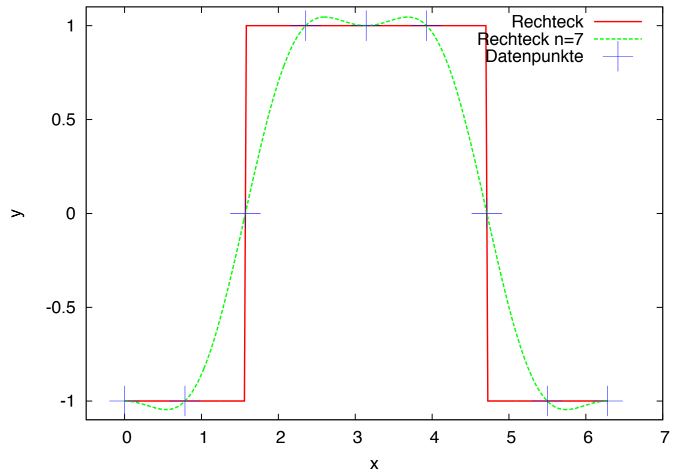
Man sieht auch, dass die gegebene Funktion für steigendes $n$ immer besser approximiert wird.





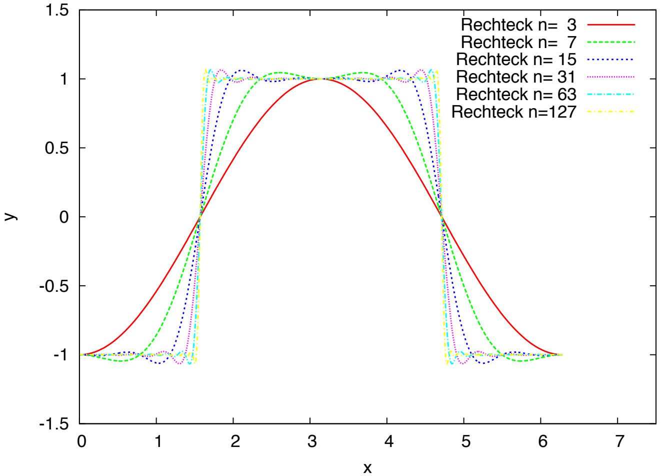

# Interpolation der Rechteckfunktion

Dasselbe nun für die *unstetige* Rechteckfunktion:



## Approximation der Rechteckfunktion

Auch hier approxmiert das trigonometrische Polynom an den Zwischenstellen immer besser:






## Interpolation unstetiger Funktionen

Allerdings nimmt der Fehler *direkt an der Sprungstelle* nicht ab. Das bezeichnet man als Gibbsches[1] Phänomen.

Man kann zeigen, dass das trigonometrische Polynom an einer Sprungstelle $\zeta$ den Wert

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\zeta^+} f(x) + \lim_{x\to\zeta^-} f(x)\right)$$

annimmt.

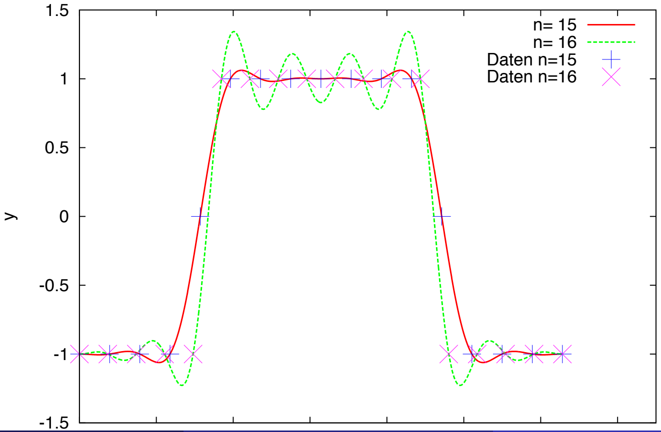
Schreibt man diesen Mittelwert an der Sprungstelle vor, erhält man eine wesentlich bessere Approximation wie das folgende Beispiel zeigt.

[1] Josiah Willard Gibbs, 1839-1903, amerik. Physiker.



## Interpolation unstetiger Funktionen (Forts.)

Wir verwenden einmal $n = 15$ (Sprungstelle ist Interpolationspunkt, Mittelwert wird vorgeschrieben) und $n = 16$ (Sprungstelle ist kein Interpolationspunkt).






## Beispiel für natürliche Daten

### GEBCO Tiefendaten am Äquator