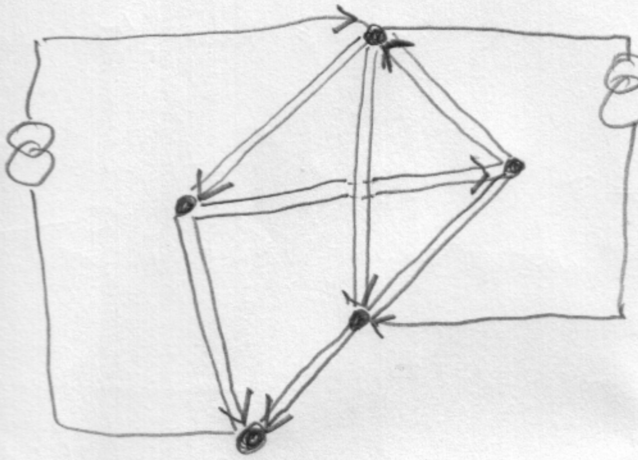
3 Motivation Lineare Gleichungssysteme

07.10.09

3.1 Strömung in Rohrleitungsnetzen



1) Netzwerk von Röhren beschrieben durch <u>gerichteten</u> Graphen.

- Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $|V| = n$.
- Kantenmenge $E = \{e_1, \dots, e_M\}$, $|E| = M$,

  $E \subseteq V \times V$, mit $(v,w) \in E \Rightarrow (w,v) \notin E$

- $E = E_R \cup E_P$ „Röhren und Pumpen", $|E_R| = m$,

  $E_R = \{e_1, \dots, e_m\}$, $E_P = \{e_{m+1}, \dots, e_M\}$.

eigentlich hier!

2) Gesetz von Hagen-Poiseuille.

Röhre $e = (v, w)$ (<u>von</u> Knoten v <u>nach</u> Knoten w)

$$(3.1) \qquad q_e = \underbrace{\frac{\pi r_e^4}{8 \eta d_e}}_{=: L_e \text{ „Leitfähigkeit"}} \Delta p_e$$

r_e : Radius der Röhre e [m]

d_e : Länge der Röhre e [m]

η : dyn. Viskosität Flüssigk. [Pa s]

q_e: Volumenstrom [m^3/s]

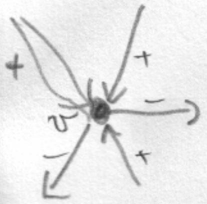
Orientierung: $q_e > 0$ falls Fluss von Knoten v nach w.

$q_e < 0$ Fluss von w nach v

Δp_e: gerichtete Druckdifferenz über Rohr e [Pa] = [$\frac{N}{m^2}$]

$\Delta p_e > 0 \to q_e > 0$

3) Knotenregel (1. Kirchhoffsches Gesetz)



$$E_v^+ = \{(u,w) \in E \mid u = v\} \quad \text{„ausgehend"}$$

$$E_v^- = \{(u,w) \in E \mid w = v\} \quad \text{„eingehend"}$$

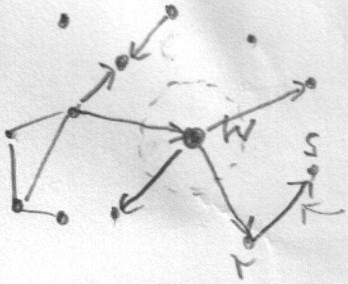
$$\sum_{e \in E_v^+} q_e - \sum_{e \in E_v^-} q_e = 0 \qquad \forall\, v \in V. \qquad (3.2)$$

Grund: Massenerhaltung, Knoten speichert keine Flüssigkeit.

Nur $n-1$ der Beziehungen (3.2) sind linear unabhängig:

Wähle $w \in V$.

$$\sum_{v \in V-\{w\}} \underbrace{\left(\sum_{e \in E_v^+} q_e - \sum_{e \in E_v^-} q_e \right)}_{=0!} = \sum_{v \in V-\{w\}} \sum_{e \in E_v^+} q_e - \sum_{v \in V-\{w\}} \sum_{e \in E_v^-} q_e$$

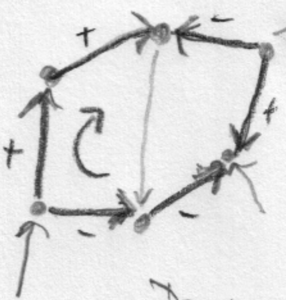


$$= \boxed{\sum_{e \in E_w^-} q_e - \sum_{e \in E_w^+} q_e = 0}$$

$e' = (r,s)$ $r \neq w$, $s \neq w$
Kommt genau zweimal vor: $+q_{e'}$ für Knoten s (eingehend)
$-q_{e'}$ für Knoten r (ausgehend)

Knotenregel für $v \in V - \{w\}$ erfüllt $\Rightarrow$ Knotenregel für w erfüllt.

4) Maschenregel (2. Kirchhoffsches Gesetz)



- Betrachte $C \subseteq E$, C beliebigen geschlossener Pfad
- $C^+ = \{ e \in C \mid e$ genauso wie C orientiert$\}$
  $C^- = \{ e \in C \mid e$ entgegen C orientiert$\}$

Dann gilt

$$\sum_{e \in C^+} \Delta p_e - \sum_{e \in C^-} \Delta p_e = 0 \qquad \forall \text{ Pfade}$$

Grund:

$$\int_v^w \underset{\frac{N}{m^2}}{\Delta p_e} \cdot \underset{m^2}{A} \cdot \underset{m}{ds}$$ ist Energie die notwendig ist um Probekörper von v nach w zu bringen

- Betr. zwei bel. Knoten r, s. Energie um K. von r nach s zu bringen unabhängig von Weg.
- Lineare Abhängigkeit!

5) Knotenpotentialverfahren

Folge der Maschenregel:

- Man darf $n-1$ Knotendrücke p_v („Potentiale") als Unbekannte wählen
- $e=(v,w)$: $\Delta p_e = p_v - p_w$
- Druck in einem (Referenz-) Knoten r kann willkürlich festgelegt werden. z.B. $p_r = 0$. ($p_v, v \in V$ Lösung $\Rightarrow p_v + \text{const}$ auch Lsg.)
- Maschenregel ist dann für alle Pfade erfüllt.

a) $\forall e \in E_R$ schreibe Druckdifferenzen:

$$e=(v,w) \in E_R : \quad \Delta p_e = \begin{cases} p_v - p_w & v \neq r \wedge w \neq r \\ p_v & w = r \\ p_w & v = r \end{cases} \qquad r: \text{Referenzknoten}$$

Wähle „Anordnung" $e_k \leftrightarrow k$ $\quad v_i \leftrightarrow i$ $\quad$ Wahl $\boxed{r = v_n}$

$$e_k=(v_i,v_j): k \begin{bmatrix} \Delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & B & \\ 1 & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \end{bmatrix} \Rightarrow p = (p_{v_1}, \dots, p_{v_{n-1}})^T$$

$i \quad j$

$$\Delta p = (\Delta p_1, \dots, \Delta p_m)$$

$m \times (n-1)$ Matrix

$|E_R| \quad |V|-1$

b) Leitfähigkeiten:

$$e \in E_R : \quad q_e = L_e \Delta p_e$$

als Matrix:

$$\begin{bmatrix} q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \end{bmatrix}$$

$m \times m$ Diagonalmatrix $\quad m = |E_R|$

c) Knotenregeln: $n-1$ Stück für Knoten $v_1, \dots, v_{n-1}$ (exklusive Referenzknoten)

$$v \in V \setminus \{v_n\} : \sum_{e \in E_v^+} q_e - \sum_{e \in E_v^-} q_e = 0$$

Pumpenströme auf rechte Seite

$$\Leftrightarrow \sum_{e \in E_v^+ \cap E_R} q_e - \sum_{e \in E_v^- \cap E_R} q_e = \sum_{e \in E_v^- \cap E_P} q_e - \sum_{e \in E_v^+ \cap E_P} q_e$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix} \qquad b = (b_1, \dots, b_{n-1})$$

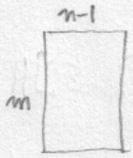
enthält Pumpenströme

$(n-1) \times m$ Matrix

Alles zusammen:

$$\underbrace{B^T L B}_{=:A}\, p = b$$

$$\Leftrightarrow \quad A p = b$$



- A ist $(n-1)\times(n-1)$ Matrix
- A ist symmetrisch und positiv definit, d.h. $x^T A x > 0 \;\forall x \neq 0$
- damit insbesondere invertierbar
- A ist dünn besetzt:

<u>Bew</u> 1) $B \in \mathbb{R}^{m\times(n-1)}$ hat max. Rang, also $n-1$ da $m \geq n-1$, $n-1$ linear unabh. Spalten!
2) L diagonal mit $l_{ii} > 0$
3) Sei $x \neq 0$, $y := Bx$ dann ist
$x^T A x = \sum_i l_{ii} y_i^2 > 0$ da
$\dim(\ker(B)) + \operatorname{rang}(B) = n-1$
und $\operatorname{rang}(B) = n-1 \Rightarrow \dim(\ker(B)) = 0$
also $y = 0$ nur für $x = 0$.

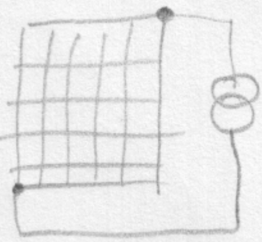
$$a_{ij} \neq 0 \iff (v_i, v_j) \in E \vee (v_j, v_i) \in E.$$

sehr viele Einträge sind Null

$$\left|\{(i,j) \mid a_{ij} \neq 0\}\right| = O(n) \quad (\text{statt } n^2).$$

Ü1 : ein kleines Netzwerk

Ü2 : New York City



- völlig analog lassen sich elektrische Netzwerke (aus Widerständen) behandeln

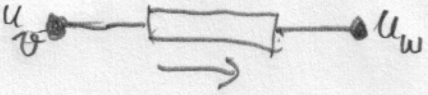
Ohmsches Gesetz:

$$i_e = \frac{1}{R_e}(u_v - u_w)$$

i_e : Strom durch Widerstand R_e

u_v : Knotenpotentiale

R_e : Widerstand



- RLC Netzwerke mit harmonischer Anregung
  → komplexe Ströme und Spannungen

$$A x = b \quad \text{mit } x, b \in \mathbb{C}^n, \; A \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

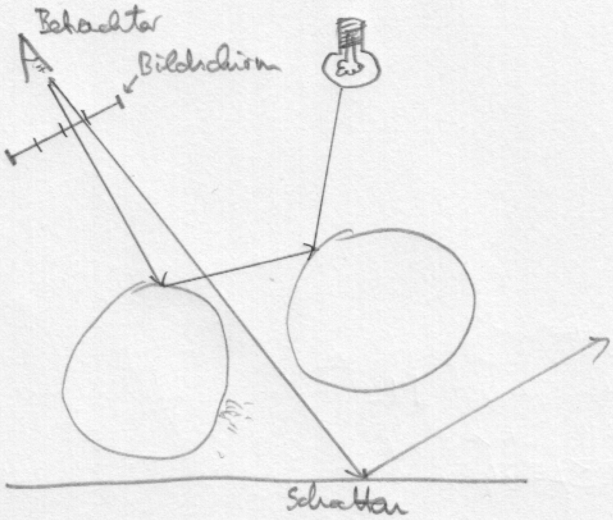
L: Spulen

C: Kapazitäten.

3.2 Radiosity-Methode in der Computergrafik

Beleuchtung einer „Szene".

Ray-Tracing:



Nachteil: starke Schatten.

Radiosity-Methode:

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x \text{ auf Oberfläche eines Objekts} \}$$

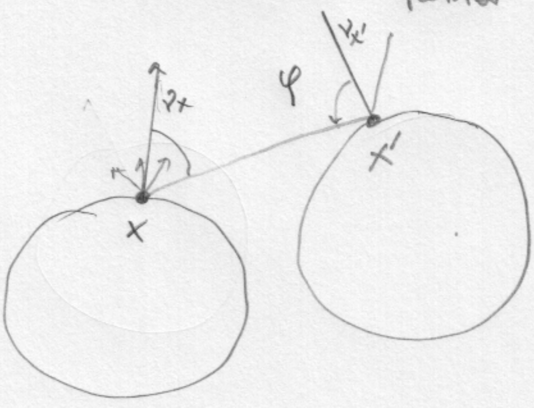
Bestimme $B : S \to \mathbb{R}$ „Energiedichte"

$$\int_\omega B \, dA = \text{von } \omega \subset S \text{ abgestrahlte Energie}$$

Energie wird von einem Punkt $x \in S$ in alle Richtungen abgestrahlt.

Bestimmungsgleichung für $B(x)$:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x \in S}}{B(x)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenstrahlung} \\ \text{(Lichtquelle)}}}{E(x)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Reflexions-} \\ \text{faktor}}}{\rho(x)} \overbrace{\int_S \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Licht} \\ \text{von } x'}}{B(x')} \underbrace{\frac{\cos\varphi_{x,x'} \cos\varphi_{x',x}}{\pi \|x-x'\|^2} V(x,x')}_{=: \lambda(x,x') \text{ „Kern"}} dA'}^{\text{reflektiertes Licht}}$$



$$\varphi_{a,b} = \measuredangle(\nu_a, b-a)$$

$$\cos\varphi_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{Licht trifft aus Richtung } \nu_a \text{ ein} \\ 0 & \text{Licht trifft tangential zur Oberfl. ein} \end{cases}$$

Sichtbarkeit (Visibility)

$$V(x,x') = \begin{cases} 1 & x' \text{ von } x \text{ aus sichtbar} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

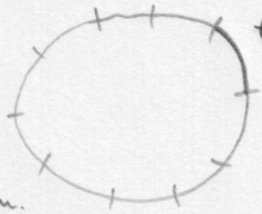
(Eigenschaft der Szene)

Integralgleichung für $B(x): S \to \mathbb{R}$:

$$B(x) - \rho(x) \int_S B(x') \lambda(x,x') \, dA' = E(x) \qquad \forall x \in S.$$

Numerische Lösung mit „Kollokationsmethode".

a) Zerlegung der Oberfläche: $\mathcal{T}_h = \{t_1, \dots, t_n\}$



$t \in \mathcal{T}_h$

$$t_i \subset S \;, \; t_i \cap t_j = \emptyset \;\; \forall i \neq j \,, \;\; \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{t_i} = S}_{\text{könnte man abschwächen.}}$$

t_i: offene Gebiete.

Zu $t \in \mathcal{T}_h$ wähle x_t = Mittelpunkt von t.

Dieser Prozess heißt auch Diskretisierung. Üblich bei Differential- und Integralgleichungen.

b) Approximiere $B: S \to \mathbb{R}$ durch diskrete Funktion $B_h: S \to \mathbb{R}$.

$$B_h(x) = \sum_{j=1}^{n} z_j \varphi_j(x)$$

$z_j \in \mathbb{R}$ Koeffizient

$\varphi_j: S \to \mathbb{R}$ „Basisfunktion"

d.h. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig.

stückweise konstante Funktionen:

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in t_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) Erfülle Integralgleichung nur für $x \in X_h = \{x_{t_1}, \dots, x_{t_n}\}$.

$$B_h(x_i) - \rho(x_i) \int_S B_h(x') \lambda(x_i, x') \, dA' = E(x_i) \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} z_j \varphi_j(x_i) - \rho(x_i) \int_S \sum_{j=1}^{n} z_j \varphi_j(x') \lambda(x_i, x') \, dA' = E(x_i) \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} z_j \Big\{ \underbrace{\varphi_j(x_i) - \rho(x_i) \int_S \varphi_j(x') \lambda(x_i, x') \, dA'}_{=:\, a_{ij}} \Big\} = \underbrace{E(x_i)}_{b_i} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{Az = b}.$$

- Integral in a_{ij} wird i. d. R. auch numerisch berechnet.
  ⇒ Methoden später in der Vorlesung.

- Man begeht einen Diskretisierungsfehler

  $$\| B - B_h \| = O(h^\alpha) \qquad \text{(Konvergenz)}$$

  mit $h = \max\limits_{t \in \mathcal{T}_h} \operatorname{diam}(t)$, α: „Konvergenzordnung".

  d. h. je feiner die Unterteilung ($n \to \infty$), desto besser approximiert B_h die gesuchte Funktion B.

  ⇒ Gleichungssysteme können beliebig groß werden.
  (im Gegensatz zum Röhrennetzwerk).

- A ist in diesem Fall <u>nicht</u> dünn besetzt sondern voll besetzt!