Übung 1 *Positiv definite Matrizen*

Sehr häufig wird im Zusammenhang mit positiv-definiten Matrizen die Symmetrie vorausgesetzt. Doch positiv-definite Matrizen müssen nicht zwangsläufig symmetrisch sein!

a) Zeigen Sie, dass $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann positiv definit ist, wenn der symmetrische Anteil

$$A_S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$$

positiv definit ist.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ und $A_X = (a_{ij})_{i,j\in X} \in \mathbb{R}^{|X|\times|X|}$ eine sogenannte *Hauptuntermatrix*. Zeigen Sie, dass A_X ist positiv definit, wenn A positiv definit ist.

c) Gegeben ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -(1+\alpha) & 2 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von α ist A positiv definit?

d) Zeigen Sie: Sei $H \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ und $A = \bar{H}^T H$. Dann gilt A ist positiv definit genau dann wenn $\mathrm{Rang}(H) = n$.

(4 Punkte)

Übung 2 *Hermitesche Matrix in* $\mathbb{C}$

Beweisen Sie:

Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt: A ist hermitesch genau dann wenn $(Ax, x)_2 \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

(2 Punkte)

Übung 3 *Raleigh-Quotienten*

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine positive definite Matrix. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei A ferner symmetrisch. Der Raleigh-Quotient eines Vektors $x \in \mathbb{K}^n$ ist definiert als

$$R_A(x) = \frac{(Ax, x)_2}{(x, x)_2}.$$

a) Zeigen Sie folgende Beziehungen zwischen den Raleigh-Quotienten und dem größten bzw. kleinsten Eigenwert von A:

$$\sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} R_A(x) = \lambda_{\max}(A) = \max\{\lambda \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von A}\}$$

$$\inf_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} R_A(x) = \lambda_{\min}(A) = \min\{\lambda \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von A}\}.$$

b) Die Kondition einer Matrix A in der euklidschen Norm ist definiert als

$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2.$$

Zeigen Sie dass sich die Kondition der Matrix in folgender Weise durch den größten und kleinsten Eigenwert von A beschreiben lässt:

$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$$

(4 Punkte)

Übung 4 *Strömung in Rohrleitungsnetzwerken (Praktische Übung)*
Auf dem Übungsblatt 3, Übung 4 sollten Sie ein lineares Gleichungssystem für beliebige Anzahl von Knoten N aufstellen. In dieser Aufgabe wird weiter daran gearbeitet.

a) Implementieren Sie ein Programm, das das Gleichungssystem für beliebiges $N \geq 3$ aufstellt und am Bildschirm ausgibt. Verwenden Sie hierzu die Matrix und Vektor Klassen der `HDNum` Bibliothek, die in der Vorlesung vorgestellt wurde.

b) Welche Normen sind in der Klasse `DenseMatrix` schon definiert? Implementieren Sie eine Methode, die auch die Frobenius-Norm berechnet. Berechen Sie alle Normen für das lineare Gleichungssystem aus a) für $N = 10$.

c) Die Potenzmethode ist ein iteratives numerisches Verfahren zur Berechnung des betragsgrößten Eigenwertes und des dazugehörigen Eigenvektors einer Matrix.

   Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und ein Startvektor $r_0 \in \mathbb{R}^n$, $Ar_0 \neq 0$ gegeben. In jedem Iterationsschritt berechnet man
   $$r_{k+1} = \frac{Ar_k}{\|Ar_k\|},$$
   d.h. die aktuelle Näherung r_k wird auf die Matrix A angewandt und dann normiert. Die Vektoren r_k konvergieren gegen einen Eigenvektor zum betragsgrößten Eigenwert, sofern dieser Eigenwert dem Betrage nach einfach ist und seine algebraische Vielfachheit gleich seiner geometrischen Vielfachheit ist. Der Rayleigh-Quotient liefert im Grenzwert den entsprechenden Eigenwert.

   Implementieren Sie dieses Verfahren, welches den größten Eigenwert und dazu entsprechenden Eigenvektor berechnet. Wenden Sie es auf das Gleichungssystem aus a) für $N = 10$.

Hinweise:

- Es wird die Numerikbibliothek *HDNUM* benötigt. Download über die Webseite der Vorlesung:
  `http://conan.iwr.uni-heidelberg.de/teaching/numerik0_Ws2015/`
- Kompilieren:

  ```
  g++ -I../hdnum/ -o knotenfluss knotenfluss.cc
  ```

  Dieser Kompilierbefehl funktioniert, wenn `knotenfluss.cc` z.B. in einem Verzeichnis `Blatt4/` parallel zum Verzeichnis `hdnum/` liegt.
- Bitte den C++ *Style Guide* beachten!
- Sie können das auf der Vorlesungshomepage zur Verfügung gestellte Programmgerüst verwenden.

(10 Punkte)