Übung 1 *Eine spezielle Tridiagonalmatrix*
Gegeben sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ von folgender Form:

$$T = \begin{pmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{pmatrix}.$$

mit $bc > 0$.

(a) Zeigen Sie: T besitzt für $k = 1, ..., n$ die Eigenwerte

$$\lambda_k = a + 2\, b\, \nu \cos(\frac{k\pi}{n+1})$$

mit den Eigenvektoren

$$v_k = \left(\nu \sin(\frac{k\pi}{n+1}), \nu^2 \sin(2\frac{k\pi}{n+1}), \cdots, \nu^n \sin(n\frac{k\pi}{n+1})\right)^T.$$

wobei $\nu = \sqrt{\frac{c}{b}}$ ist.

Nützliche Hilfe: Es gilt für $l, x \in \mathbb{R}$ die Formel:

$$2\cos(x)\sin(lx) = \sin((l+1)x) + \sin((l-1)x)$$

(b) Berechnen Sie für $a = 2$ und $b = c = -1$ die Kondition $\mathrm{cond}_2(T)$. Geben Sie ihr Verhalten für $n \longrightarrow \infty$ in Landaunotation an.

(5 Punkte)

Übung 2 *Kondition konkreter Matrizen*

a) Es sei $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{nn} \end{pmatrix}, \qquad d_{ii} > 0.$$

Geben Sie $cond_\infty(D) = \|D\|_\infty \|D^{-1}\|_\infty$ an.

b) Sei $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ der Form

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren haben die Form

$$e^\mu = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\left(\sin\left(\frac{\mu\pi}{n+1}\right), \sin\left(2\frac{\mu\pi}{n+1}\right), \cdots, \sin\left(n\frac{\mu\pi}{n+1}\right)\right)^T.$$

Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass $\{e^\mu\}$ eine Orthonormalbasis ist. Berechnen Sie $cond_\infty(L)$ in Abhängigkeit von n.

(5 Punkte)

Übung 3 *Zur Gauß Elimination*

a) Nach k Schritten der Gauß-Elimination hat die Matrix $A^{(k)}$ folgende Blockgestalt:

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} R_{11}^{(k)} & R_{12}^{(k)} \\ 0 & B^{(k)} \end{bmatrix} \tag{1}$$

wobei $R_{11}^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $R_{12}^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$ und $B^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$.
Zeigen Sie: Für die Blockzerlegung

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} \alpha^{(k)} & (w^{(k)})^T \\ \sigma^{(k)} & C^{(k)} \end{bmatrix} \tag{2}$$

mit $C^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n-k-1)\times(n-k-1)}$ und $\sigma^{(k)}, w^{(k)} \in \mathbb{R}^{n-k-1}, \alpha^{(k)} \neq 0$ gilt die Rekursionsformel

$$B^{(k+1)} = C^{(k)} - \frac{1}{\alpha^{(k)}}\sigma^{(k)}(w^{(k)})^T. \tag{3}$$

b) Begründen Sie, dass auch folgender Algorithmus die LR Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durchführt. Es wird angenommen, dass keine Zeilenvertauschungen notwendig sind. Ein formaler Beweis ist nicht verlangt.

for $(i = 2...n)$ **do**
  for $(j = 2...i)$ **do**
    $l_{i,j-1} = a_{i,j-1} \,/\, a_{j-1,j-1}$
    for $(k = 1..j-1)$ **do**
      $a_{i,j} = a_{i,j} - l_{i,k}\, a_{k,j}$
    end for
  end for
  for $(j = i+1...n)$ **do**
    for $(k = 1..i-1)$ **do**
      $a_{i,j} = a_{i,j} - l_{i,k} a_{k,j}$
    end for
  end for
end for

(5 Punkte)

Übung 4 *Gauß-Elimination (Praktische Übung)*

Schreiben Sie eine neue Headerdatei `gauss.hh`, die die Template-Funktion

```
template<typename NUMBER>
void gauss( hdnum::DenseMatrix<NUMBER> A,   // Input A
            hdnum::Vector<NUMBER>& x,       // Output x
            hdnum::Vector<NUMBER> b         // Input b
            ){
              ...
            }
```

zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$) nach dem Eliminationsverfahren von Gauß *mit* Spaltenpivotsuche und Zeilenvertauschung enthält.
Diese Headerdatei wird benötigt, damit das Hauptprogramm `gaussmain.cc` (siehe Webseite der Vorlesung) kompiliert werden kann und das dort aufgeführte Gleichungssystem $Ax = b$ nach x gelöst werden kann.
Kompilieren Sie das Programm für die beiden Datentypen `double` und `float` und überprüfen Sie, wie groß jeweils die Dimension n maximal sein darf, damit das Programm für das dort aufgeführte Gleichungssystem noch eine richtige Lösung liefert.

(5 Punkte)