Übung 1 *Rückwärtsanalyse des Lösens eines Dreiecksystems*

Es seien $\hat{x}$ bzw. $\hat{y}$ die numerischen Lösungen des unteren bzw. oberen Dreieckssystems $Lx = b$ und $Ry = c$ mit $L, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt:

$$(L + F)\hat{x} = b \qquad |F| \leq n \text{ eps } |L| + O(\text{eps}^2) \tag{1}$$
$$(R + G)\hat{y} = c \qquad |G| \leq n \text{ eps } |R| + O(\text{eps}^2) \tag{2}$$

Hierbei sind $F, G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und für gegebenes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definieren wir mit $|A| \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix, welche die Beträge der Einträge von A enthält:

$$(|A|)_{i,j} = |a_{i,j}|.$$

Beweisen Sie Gleichung (1) durch Induktion (Gleichung (2) geht analog und muss nicht separat bewiesen werden). Tipp: Verwenden Sie mitunter $\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

(5 Punkte)

Übung 2 *Eigenschaften der LR-Zerlegung*

a) Zeigen Sie, dass die Menge der unteren Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Hauptdiagonalen bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet. (Ist diese Gruppe abelsch?) Damit lässt sich die Eindeutigkeit der LR-Zerlegung $A = LR$ nachweisen, wenn L eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonalen ist.

b) Gegeben sei eine LR-Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $|l_{ij}| \leq 1$, $A = LR$ (keine Zeilenvertauschungen). Bezeichne a_i^T und r_i^T die i-te Reihe von A bzw. R. Zeigen Sie, dass

$$r_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_j^T$$

gilt und verwenden Sie diese Beziehung, um

$$\|R\|_\infty \leq 2^{n-1} \|A\|_\infty$$

zu beweisen (Norm der Gleichung bilden - dann Induktion).

(5 Punkte)

Übung 3 *LR-Zerlegung konkret*

Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 10 & \frac{15}{2} \\ -2 & 6 & 3 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & -\frac{11}{2} \\ -2 & 10 & -12 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 52 \\ 59 \\ -11 \\ -18 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie (mit Bleistift und Papier) die eindeutige LR-Zerlegung von A und die Determinante von A. Lösen Sie $Ax = b$.
- Berechnen Sie die Konditionszahl $\mathrm{cond}_\infty(A)$.

(4 Punkte)

Übung 4 *LR-Zerlegung (Praktische Übung)*

Zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$) nach der LR-Zerlegung soll der Algorithmus aus der Vorlesung implementiert werden.

a) Schreiben Sie eine neue Headerdatei `LR.hh`, welche die beiden Template-Funktionen

```
template<class T>
void lr( hdnum::DenseMatrix<T>& A,
         hdnum::Vector<std::size_t>& perm
       ){...}
```

und

```
template<class T>
void permute_forward( const hdnum::Vector<std::size_t>& perm,
                      hdnum::Vector<T>& b )
{...}
```

enthält.

Die Funktion `void lr(...)` soll die LR-Zerlegung von A berechnen und das Ergebnis L und R wiederum in die Matrix `A` speichern. Der Indexvektor `perm` soll sich die Permutation der Zeilen merken.

Die Funktion `void permute_forward(...)` soll dieselben Permutationen auf die Rechte Seite b übertragen.

Zur Vorwärts- und Rückwärtssubstitution können dann die beiden Headerdateien `solveL.hh` und `solveR.hh` (siehe Webseite der Vorlesung) benutzt werden.

Diese Headerdateien werden benötigt, damit das Hauptprogramm `testLR.cc` (siehe Webseite der Vorlesung) kompiliert werden kann und das dort aufgeführte Gleichungssystem $Ax = b$ gelöst werden kann.

b) Kompilieren Sie das Programm für die beiden Datentypen `double` und `float` und überprüfen Sie, wie groß jeweils die Dimension n maximal sein darf, damit das Programm für das dort aufgeführte Gleichungssystem nicht eine falsche Lösung x liefert ($\|x - x_r\| < 10^{-3}$, wobei x_r die analytische Lösung ist).

c) Lösen Sie das Gleichungsystem aus der Übungsaufgabe 3 unter Benutzung der LR-Zerlegung und kontrollieren Sie die Richtigkeit von Ihnen bestimmten LR-Zerlegung.

(6 Punkte)

Algorithmus zur LR-Zerlegung

Input: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ (wird überschrieben)

Output: $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $a_{ij}, j < i, l_{ii} = 1$ implizit
$R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $a_{ij}, j \geq i$
$p: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$

for $(k = 1; k < n; k = k + 1)$ **do**
  Finde $r \in$ {k,...,n} so dass $a_{rk} \neq 0$; (sonst Fehler);
  if $(r \neq k)$ **then** {tausche Zeile k mit Zeile r}
    for $(j = 1; j \leq n; j = j + 1)$ **do**
      $t = a_{kj}$;$a_{kj} = a_{rj}$;$a_{rj} = t$;
    end for
  end if
  $p_k = r$; {merke Permutation}
  {Update der unteren Zeilen}
  for $(i = k + 1; i \leq n; i = i + 1)$ **do**
    $a_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$;
    for $(j = k + 1; j \leq n; j = j + 1)$ **do**
      $a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}$;
    end for
  end for
end for
{Permutation von b}
for $(k = 1; k < n; k = k + 1)$ **do**
  if $(p_k \neq k)$ **then**
    $t = b_k$;$b_k = b_{p_k}$;$b_{p_k} = t$;
  end if
end for
{Vorwärtseinsetzen}
for $(k = 1; k \leq n; k = k + 1)$ **do**
  $t = 0$;
  for $(j = 1; j < k; j = j + 1)$ **do**
    $t = t + a_{kj} \cdot x_j$;
  end for
  $x_k = b_k - t$;
end for
{Rückwärtseinsetzen}
for $(k = n; k \geq 1; k = k - 1)$ **do**
  $t = 0$;
  for $(j = k + 1; j \leq n; j = j + 1)$ **do**
    $t = t + a_{kj} \cdot x_j$;
  end for
  $x_k = (x_k - t)/a_{kk}$;
end for