

Übung 1 Lagrange Interpolation

Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ auf einem Intervall $[a, b]$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Fehler $f - p_n$ der Lagrange-Interpolation p_n von f über beliebig verteilten $n+1$ (paarweise verschiedenen) Stützstellen aus $[a, b]$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen Null konvergiert:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Was unterscheidet diese Funktion von dem Beispiel $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, für welches die Interpolation für $n \rightarrow \infty$ nicht konvergiert? (Eine Begründung reicht hier, Sie müssen den Fehler für diese zweite Funktion nicht explizit ausrechnen.)

(5 Punkte)

Übung 2 Schema von Aitken-Neville

Sei P_k der Raum der Polynome über \mathbb{R} vom Grad maximal k , $k \in \mathbb{N}_0$. Sei $p_{i,k} \in P_k$ das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom zu den Wertepaaren $(x_i, y_i), \dots, (x_{i+k}, y_{i+k})$.

a) Zeigen Sie, dass folgende Rekursionsformel gilt:

$$(i) \quad p_{i,0}(x) = y_i \quad \text{für } i = 0, \dots, n,$$

$$(ii) \quad p_{i,k}(x) = \frac{(x - x_i)p_{i+1,k-1}(x) - (x - x_{i+k})p_{i,k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i} \quad \text{für } i = 0, \dots, n - k.$$

b) Damit lässt sich das Interpolationspolynom $p_{0,n}(x)$ zu den Wertepaaren $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ an einem Punkt $x = \zeta$ auswerten, ohne die Koeffizienten des Polynoms explizit zu berechnen.

Für verschiedene Orte wurde an einem bestimmten Tag die Tageslänge gemessen:

Ort	Tageslänge	Lage
A	17h 28m	55,7°
B	18h 00m	57,7°
C	18h 31m	59,3°
D	19h 56m	62,6°

Bestimmen Sie die Tageslänge am Ort E bei 61,7° durch Auswertung des zugehörigen Interpolationspolynoms mit Hilfe des Neville-Schemas. Es genügt auf 2 Nachkommastellen genau zu rechnen.

(5 Punkte)

Übung 3 Numerische Differenziation

- a) Sei $f \in C^2([a, b])$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$. Bei der numerischen Auswertung von $f'(x)$ wählt man eine möglichst kleine Schrittweite h und berechnet den Vorwärtsdifferenzenquotienten

$$d_h = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Der Differenzquotient d_h wird exakt berechnet und nicht mit Gleitkommazahlen. Zeigen Sie, dass für den dabei gemachten Diskretisierungsfehler gilt:

$$|d_h(x) - f'(x)| \leq c \cdot h, \quad c \in \mathbb{R}$$

- b) Doch die Schrittweite h darf man nicht zu klein wählen, denn bei der numerischen Differenziation spielt die Auslöschung eine wesentliche Rolle. Sei $f(x)$ der echte Wert von f an der Stelle x und $\tilde{f}(x)$ seine Darstellung auf einem Computer, der mit der Maschinengenauigkeit eps arbeitet. Es gelte also $|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq eps$. Zeigen Sie, dass man die Schrittweite h in der Größenordnung von \sqrt{eps} wählen sollte, um den Gesamtfehler

$$|\tilde{d}_h(x) - f'(x)|$$

zu minimieren.

Hinweis: Untersuchen Sie zuerst $|\tilde{d}_h(x) - d_h(x)|$. Bei der Abschätzung von $|\tilde{d}_h(x) - f'(x)|$ benutzen Sie das Ergebnis a)

(5 Punkte)

Übung 4 Numerische Differenziation (Praktische Übung)

- a) Schreiben sie eine Funktion, welche die zweite Ableitung von $\sinh(x)$ für $x = 0.6$ mit dem zweiten Differenzenquotient für ein gegebenes h ermittelt:

$$\frac{d^2}{dx^2} \sinh(x) \approx \frac{\sinh(x+h) - 2\sinh x + \sinh(x-h)}{h^2}.$$

- b) Berechnen Sie mit der Funktion aus a) die Werte für $h_i = 10^{-i}$ für $i = 1..10$. Vergleichen Sie die Werte mit dem exakten Wert.
Erinnerung: $\frac{d^2}{dx^2} \sinh(x) = \sinh(x)$.
- c) Warum werden die Werte für kleiner werdendes h irgendwann schlechter?
- d) Untersuchen Sie inwieweit man die numerischen Werte in einer Extrapolation zum Limes verwenden kann um ein besseres Ergebnis zu erreichen. Bedenken Sie hierbei, dass der Sinus Hyperbolicus in der Taylor Entwicklung durch

$$\sinh(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

als Polynom in x^2 dargestellt werden kann.

(5 Punkte)