Numerik, Sommersemester 2010 Aufgabenblatt 10
Prof. Peter Bastian Abgabe 2. Juli 2010
IWR, Universität Heidelberg

Übung 1 Kreisring

Zu lösen sei

$$\Delta u = 0$$

in $\Omega = \{(x,y)^T | r_1 < \sqrt{x^2+y^2} < r_2\}$ mit $0 < r_1 < r_2$ und

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u_1 \quad \text{wenn } (x,y)^T \in \Gamma_1 := \{(x,y)^T | r_1 = \sqrt{x^2+y^2}\}, \\ u(x,y) &= u_2 \quad \text{wenn } (x,y)^T \in \Gamma_2 := \{(x,y)^T | r_2 = \sqrt{x^2+y^2}\}. \end{aligned}$$

In Polarkoordinaten hängt $\tilde{u}(r,\phi) = u(x,y)$ nicht vom Winkel ab. Damit reduziert sich das Problem auf

$$\partial_r^2 \tilde{u} + \frac{1}{r}\partial_r \tilde{u} = 0, \quad \tilde{u}(r_1) = u_1, \quad \tilde{u}(r_2) = u_2.$$

1. Verifizieren Sie, dass $\tilde{u}(r) = a\ln(r) + b$ eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung darstellt.
2. Bestimmen Sie die Konstanten a und b aus den Randbedingungen und zeigen Sie hierdurch, dass die spezielle Lösung durch

$$\tilde{u}(r) = \frac{u_1 - u_2}{\ln r_1 - \ln r_2}(\ln r - \ln r_1) + u_1$$

gegeben ist.

4 Punkte

Übung 2 Radialsymmetrische Harmonische Funktionen

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2,3)$ eine harmonische und radialsymmetrische Funktion mit $u(x) = v(r(x))$. Hierbei ist $r : \Omega \to \mathbb{R}$ der Abstand vom Ursprung $r(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$ und $\Gamma = r(\Omega)$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-n}{r} \qquad \forall r \in \Gamma,$$

falls $v'(r(x)) \neq 0 \; \forall x \in \Omega$. *4 Punkte*

Übung 3 Typeneinteilung

Bestimmen Sie den Typ (elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch) der folgenden partiellen DG 2. Ordnung in Abhängigkeit von x und y:

1. $x\partial_{xx}u + 2y\partial_{xy}u + y^2\partial_{yy}u + \partial_x u - u = 0$
2. $y\partial_{xx}u - 2(x+y)\partial_{xy}u + 4x\partial_{yy}u - \partial_x u + \partial_y u = 0 \qquad$ (nur für $x > |y|$)

4 Punkte

Die partielle Differentialgleichung

$$-\nabla\left(k(x)\nabla u(x)\right) = q(x) \quad \forall x \in \Omega$$

mit $k \in C^1(\bar{\Omega})$ beschreibt ein elliptisches Problem auf einem beschränkten, offenen Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^2$. In einem einfachen Diskretisierungs-Ansatz, werden die Ableitungen unter Anwendung eines Differenzen-Verfahrens diskretisiert. Hierzu definiert man für gegebenes $h \in \mathbb{R}^2$ die Punktmenge

$$\mathcal{T} = \{x := \sum_{j=1}^{2} e_j\, h_j\, \alpha_j \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z} \wedge x \in \Omega\}.$$

Da die Anzahl der Gitterpunkte $N := |\mathcal{T}|$ endlich ist, existiert eine Folge $(x_i)_{1\le i\le N}$ mit $\mathcal{T} = \{x_i \mid i = 1 \dots N\}$ und man löst die Gleichungen

$$\Gamma_i := -\sum_{j=1}^{d} \frac{1}{h_j^2}\left(k_{i,j}^{+}\left(\tilde{u}(x_i + h_j) - \tilde{u}(x_i)\right) - k_{i,j}^{-}\left(\tilde{u}(x_i) - \tilde{u}(x_i - h_j)\right)\right) - q(x_i) = 0, \qquad \forall i \in 1, \dots, N. \tag{1}$$

wobei

$$\begin{aligned} k_{i,j}^{+} &:= \frac{1}{2}(k(x_i + h_j) + k(x_i)), \\ k_{i,j}^{-} &:= \frac{1}{2}(k(x_i) + k(x_i - h_j)), \end{aligned}$$

und $\tilde{u}$ eine Gitterfunktion bezeichnet, welche nur in den Punkten von $\mathcal{T}$ definiert ist. Mit $U \in \mathbb{R}^N$ und $(U)_i := \tilde{u}(x_i)$ können wir durch $(F(U))_i := \Gamma_i$ die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definieren und das diskrete Problem aus Gleichung (1) kann als

$$F(U) = 0 \tag{2}$$

geschrieben werden. Diese lineare algebraische Gleichung kann z.B. durch einen Schritt des Newton-Verfahrens gelöst werden (was genau das ist, das in der Implementierung letztlich geschieht).

Die Datei *hdnum/src/pde.hh* enthält die Implementierung einer stationären Löserklasse, welche dazu gedacht ist, Gleichungen vom Typ 2 zu lösen. Eine Beispiel-Implementierung des zur Laplace Gleichung $\Delta u = 0$ gehörenden Modellproblem findet man in *hdnum/examples/laplace.hh*. Eine kommentierte Beispielanwendung (das aus der Vorlesung bekannte Problem mit der einschneidenden Ecke) findet sich in *hdnum/examples/ecke.cc*. Die dort geschriebenen Gnuplot Dateien, können Sie einfach durch den Befehl `gnuplot dateiname.gp` betrachten. Zum genauen Verständnis des Codes kann auch ein Blick in die Datei *hdnum/src/sgrid.hh* hilfreich sein, in welcher eine Helfer-Klasse für das Gitter $\mathcal{T}$ implementiert ist.

1. Machen Sie sich mit dem Beispiel in *hdnum/examples/ecke.cc* und der Implementierung in *hdnum/examples/laplace.hh* vertraut. Letztere erlaubt die Anwendung von Neumann sowie von Dirichlet Rändern. Gleichung 1 (mit $k(x) = 1$, $q(x) = 0$) wird dabei nur für Punkte innerhalb des Gitters verwendet und für Punkte auf dem Gitterrand modifiziert. Geben Sie analog die Gleichungen an, welche von der Implementierung (jeweils für Dirichlet bzw. Neumann Knoten) in diesen Punkten gelöst werden.

2. Implementieren Sie das Beispiel-Problem aus Aufgabe 1. Hierzu können Sie noch die Laplace-Modellklasse verwenden und müssen nur alternative Implementierungen der `DomainFunction` und der `BoundaryFunction` bereit stellen. Bestimmen Sie anhand der analytischen Lösungen die Konvergenzordnung des Verfahrens.

3. Implementieren Sie eine eigene Modellklasse, welche der Gleichung 1 bzw. 2 entspricht. Die Laplace-Modellklasse kann hier als Ausgangspunkt verwendet werden. Lösen Sie mit Hilfe dieser Implementierung das folgende Beispielproblem:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2\}, \\
k(x,y) &= \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \leq 1 \\ 100 & \text{sonst }, \end{cases} \\
q(x,y) &= \begin{cases} 100 & \text{wenn } \left\|(x,y)^T - (1,1)^T\right\|_2 \leq 0.15 \\ 0 & \text{sonst }, \end{cases} \\
u(x,y) = 0, &\qquad (x,y)^T \in \partial\Omega \ \wedge \ x > 1, \quad \text{Dirichlet Rand} \\
k(x,y)\nabla u(x,y) = (3,0)^T, &\qquad (x,y)^T \in \partial\Omega \ \wedge \ x \leq 1, \quad \text{Neumann Rand}
\end{aligned}$$

Überlegen Sie sich ein physikalisches System welches von diesem Beispiel beschrieben wird. Erklären Sie anhand dieses Problems, das Verhalten der Lösung qualitativ.

10 Punkte