## Übung 1 Mittelwerteigenschaft

Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonische Funktion auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (also $\Delta u(x) = 0\ \forall x \in \Omega$). Sei $B_R(y) \subset \Omega$ eine Kugel von Radius $R$ um $y \in \Omega$.

1. Verwenden Sie die Polarkoordinaten $r = |x-y|$ und $\omega = \frac{x-y}{r}$ und schreiben Sie $u(x) = u(y+r\omega)$. Zeigen Sie damit, dass gilt:

$$0 = \int\limits_{\partial B_\rho(y)} \nabla u \cdot \nu \, ds = \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho^{1-n} \int\limits_{\partial B_\rho(y)} u \, ds \right], \qquad \forall \rho \in (0, R).$$

2. Allgemein gilt

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{1-n} \int\limits_{\partial B_\rho(y)} u ds = n\omega_n u(y),$$

   wobei $\omega_n$ das Volumen der Einheitskugel in $n$ Dimensionen bezeichnet. Folgern Sie mit dieser und der zuvor bewiesenen Beziehung die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{\partial B_R(y)} u \, ds$$

   und damit dann auch

$$u(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int\limits_{B_R(y)} u \, dx.$$

*4 Punkte*

## Übung 2 Diskretes Vergleichsprinzip

Seien $u^h, v^h : \bar{\Omega}_h \to \mathbb{R}$ Gitterfunktionen und

$$(L_h u^h)_{i,j} := \frac{4u^h_{i,j} - u^h_{i+1,j} - u^h_{i-1,j} - u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j-1}}{h^2} \quad \text{für} \quad i,j = 1, \dots, n-1$$

die Diskretisierung des Laplace-Operators auf einem uniformen Gitter. Es gelte

$$L_h u^h \leq L_h v^h, \quad \forall x \in \Omega_h \quad \text{und } u^h \leq v^h, \quad \forall x \in \partial\Omega_h.$$

Zeigen Sie, dass dann $u^h \leq v^h$ auf $\bar{\Omega}^h$.
*Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass das diskrete Maximumsprinzip auch für $L_h u^h \leq 0$ gilt. Wenden Sie es dann auf $u_h - v_h$ an.*

*4 Punkte*

## Übung 3 Invers-Monotone Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invers-monotone Matrix, d.h. für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gelte

$$Ax \leq Ay \text{ (komponentenweise)} \Rightarrow x \leq y \text{ (komponentenweise)},$$

dann ist $A$ invertierbar und für alle Elemente $a^{-1}_{i,j}$ von $A^{-1}$ gilt: $a^{-1}_{i,j} \geq 0$. *4 Punkte*

## ÜBUNG 4 KLASSISCHES MAXIMUMSPRINZIP

1. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $b \in C^1(\bar{\Omega})$ und es gelte

$$L(u) := -\Delta u + b(x) \cdot \nabla u < 0, \qquad \forall x \in \Omega.$$

   Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

   *Hinweis: Dies ist ein Spezialfall des allgemeinen Maximumsprinzips, welchen man am einfachsten durch Widerspruch beweisen kann.*

2. Seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ mit

$$L(u) < L(v), \qquad \forall x \in \Omega \qquad \text{und} \qquad u \leq v, \qquad \forall x \in \partial\Omega.$$

   Zeigen Sie, dass dann $u \leq v,\ \forall x \in \bar{\Omega}$.

   *Hinweis: Wenden Sie das Maximumsprinzip an.*

*4 Punkte*

## ÜBUNG 5 KETTENEIGENSCHAFT

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Man nennt $A$ *reduzibel*, falls es eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, so dass

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen $A_{11}$ und $A_{22}$ (beide mindestens von Dimension 1).

Falls demgegenüber $A$ die Eigenschaft hat, dass es für jedes Paar $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ eine Folge $i = i_0, i_1, \dots, i_l = j$ gibt, so dass die Elemente $a_{i,j}$ von $A$ die Bedingungen $a_{i_0,i_1} \neq 0$, $a_{i_1,i_2} \neq 0, \dots, a_{i_{l-1},i_l} \neq 0$ erfüllen, dann sagt man $A$ besitze die *Ketteneigenschaft*.

Zeigen Sie, dass $A$ genau dann irreduzibel (also nicht reduzibel) ist, wenn sie die Ketteneigenschaft besitzt. *4 Punkte*