Übung 1 Lemma von Gronwall

Das Lemma von Gronwall lautet:
Für die stückweise stetige Funktion $w(t)$ gelte:

$$w(t) \leq \int_{t_0}^{t} a(s)w(s)ds + b(t), \qquad t \geq t_0.$$

Hierbei sei $a(t) \geq 0$ eine integrierbare und $b(t) \geq 0$ eine monoton wachsende Funktion. Dann folgt

$$w(t) \leq \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) b(t), \qquad t \geq t_0.$$

Verwenden Sie diese Beziehung, um das folgende diskrete Analogon zu beweisen:
Seien $(w_n)_{n\geq 0}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ Folgen nicht negativer Zahlen, mit $w_0 \leq b_0$ und

$$w_n \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu w_\nu + b_n, \qquad n \geq 1$$

dann gilt unter Annahme einer nicht fallenden Folge $(b_n)_{n\geq 0}$:

$$w_n \leq \exp(\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu) b_n, \qquad n \geq 1.$$

4 Punkte

Übung 2 Lineare Anfangswertaufgaben

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrisch positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass dann die global eindeutige Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des linearen Anfangswertproblems

$$u'(t) = Au(t), \quad t \geq t_0, \qquad u(t_0) = u_0 \qquad t_0 \in \mathbb{R}, u_0 \in \mathbb{R}^n$$

   durch

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n} \zeta_i e^{\alpha_i t}$$

   mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $\zeta_i \in \mathbb{R}^d$ dargestellt werden kann.

2. Bestimmen Sie die Lösung der AWA

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t), \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   mit $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$.

3. Für jede Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert ein $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ so dass eine Darstellung

$$T^{-1}MT = \begin{pmatrix} J_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\alpha_k} \end{pmatrix}$$

mit $k \leq n$ und den Jordankästchen

$$J_{\alpha_i} = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_i & 1 \\ & & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

existiert.

Dies nennt man die Jordansche Normalform und die α_i sind gerade die Eigenwerte der Matrix M.

Zeigen Sie, dass die Lösung der AWA aus Teil 1. für beliebiges $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau dann eine Darstellung

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i e^{\beta_i t} \qquad \beta_i \in \mathbb{C}, \xi_i \in \mathbb{C}^d$$

hat, wenn die Jordansche Normalform zur Diagonalmatrix degeneriert, die Matrix A also diagonalisierbar ist.

5 Punkte

Übung 3 Lösbarkeitseigenschaften

Untersuchen Sie mit Hilfe der Resultate aus der Vorlesung die Lösbarkeitseigenschaften (eindeutig, global, beschränkt, exponentiell stabil) der folgenden AWA:

1. $u'(t) = u(t)^2, \quad t \geq 0,\ u(0) = 1,$
2. $u'(t) = -u(t)^2, \quad t \geq 0,\ u(0) = 1,$
3. $u'(t) = u(t)^{1/2}, \quad t \geq 0,\ u(0) = 1,$
4. $u'(t) = \cos(u(t)) - 2u(t), \quad t \geq 0,\ u(0) = 1.$

4 Punkte

Übung 4 Abschneide-Fehler des impliziten Euler Verfahrens

Der Abschneide-Fehler des impliziten Euler Verfahrens zur Lösung einer Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = f(u(t), t), \qquad t \geq t_0,\ u(t_0) = u_0$$

ist gegeben durch

$$\tau_n^h = h_n^{-1}\left(u(t_n) - u(t_{n-1})\right) - f(t_n, u(t_n)),$$

wobei $(t_n)_{n \geq 0}$ eine Folge diskreter Zeitpunkte und $h_n = t_{n+1} - t_n$ die zugehörigen Schrittweiten darstellen.

Zeigen Sie durch Taylor-Entwicklung in $u(\cdot)\big|_{t_{n-1}}$, dass gilt:

$$\|\tau_n^h\| = \frac{h_n}{2}\|u''(\zeta_n)\| \ \text{ für ein } \ \zeta_n \in [t_{n-1}, t_n].$$

4 Punkte