Numerik, Sommersemester 2010 Aufgabenblatt 4
Prof. Peter Bastian Abgabe 21. Mai 2010
IWR, Universität Heidelberg

ÜBUNG 1 HP - VERFEINERUNG

Für eine gegebene AWA gebe es Einschrittverfahren mit Lipschitz-stetigen Verfahrensfunktionen $F_p(h_i, t_k, y_k, y_{k-1})$ der Ordnung p und $h_i = 2^{-i}$. Wir nehmen an, die damit berechneten Approximationen $Y_{p,i}$ der exakten Lösung $u(T)$ zum Zeitpunkt T genügen

$$\|e_{p,i}\| := \|Y_{p,i} - u(T)\| = K\,T\,C_{p,i}\,h_i^p + \mathcal{O}(h_i^{p+1}).$$

Hierbei sei die Konstante $K \in \mathbb{R}$ unabhängig von der Wahl von p, i und es gelte $C_{p,i} \to C$ für $p, i \to \infty$.

Eine Lösung $Y_{p,i}$ sei berechnet, aber ihre Genauigkeit unbefriedigend. Die Kosten der Berechnung seien gegeben durch

$$r(i, p) = 2^i \cdot m(p)$$

mit einer monoton wachsenden Funktion m. Diskutieren Sie unter welchen Voraussetzungen an $i, p, C_{p,i}$ und m die Berechnung von $Y_{p+1,i}$ viel versprechender ist als die Berechnung von $Y_{p,i+1}$.

3 Punkte

ÜBUNG 2 KONVERGENZORDNUNG

Für eine gegebene AWA berechne ein Einschrittverfahren Approximationen Y_i der exakten Lösung $u(T)$ zum Zeitpunkt T für $h_i = 2^{-i}$. Unter welchen Voraussetzungen liefert die Formel

$$p = -\frac{1}{\log(2)} \log\left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1} - Y_{i-2}}\right)$$

eine asymptotische Näherung der Konvergenzordnung des Verfahrens.

Für die meisten interessanten AWA Probleme sind (natürlich) keine analytischen Lösungen verfügbar. Auf diese Weise kann die Konvergenzordnung dann aber immer noch näherungsweise bestimmt werden.

3 Punkte

ÜBUNG 3 RUNGE-KUTTA VERFAHREN

Das allgemeine Runge-Kutta Verfahren hat die Form

$$y_n = y_{n-1} + h_n F(h_n; t_{n-1}, y_n, y_{n-1})$$

mit der Verfahrensfunktion

$$F(h; t, x) = \sum_{r=1}^{R} b_r k_r(h; t, x), \qquad k_r(h; t, x) = f(t + hc_r, x + h \sum_{j=1}^{R} a_{rj} k_j),$$

mit Konstanten $a_{rj}, b_r, c_r \quad (1 \le r, j \le R)$. Im Fall $a_{rj} = 0$ für $j \ge r$ ist das Schema explizit. Man zeige:

a) Dieses Verfahren genügt der Lipschitz-Bedingung

$$\|F(h; t, x) - F(h; t, \tilde{x})\| \le L\|x - \tilde{x}\|,$$

wenn die Funktion $f(t, x)$ (bzgl. x) Lipschitz-stetig ist.

b) Das Verfahren ist genau dann konsistent, wenn $\sum_{r=1}^{R} b_r = 1$ ist.

3 Punkte

ÜBUNG 4 AUTONOMISIERUNG

Unter Autonomisierung einer AWA versteht man das Lösen des erweiterten Systems

$$\tilde{y}' = \tilde{f}(\tilde{y}) \text{ mit } \tilde{y} = \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}, \tilde{f}(\tilde{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,y) \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{y}(t_0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

welches offensichtlich äquivalent ist zum Problem

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Ein Einschrittverfahren heißt invariant gegen Autonomisierung, wenn die zu f bzw. $\tilde{f}$ gehörenden Verfahrensfunktionen F bzw. $\tilde{F}$ dieselben Ergebnisse produzieren, also

$$\tilde{F}(h, \tilde{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ F(t,y,h) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass ein explizites Runge-Kutta Verfahren der Stufe R genau dann invariant gegen Autonomisierung ist, wenn gilt

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}, \quad (1 \leq i \leq R).$$

3 Punkte