Numerik, Sommersemester 2010 — Aufgabenblatt 5
Prof. Peter Bastian — Abgabe 28. Mai 2010
IWR, Universität Heidelberg

Übung 1 Runge-Kutta Vefahren für lineare AWA

Die autonome lineare AWA

$$u'(t) = Au(t) \qquad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^n$$

mit diagonalisierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist äquivalent zu einer AWA

$$(v'(t))_i = \lambda_i (v(t))_i \qquad v(t_0)_i = v_{i,0} \in \mathbb{C},\ \lambda_i \in \mathbb{C} \qquad (i = 1 \dots n)$$

in dem Sinne von $v(t) = Qu(t)$, wobei die reguläre Matrix $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gerade $QAQ^{-1} = 1$ erfüllt.

Zeigen Sie, dass unter Annahme exakter Arithmetik die Verwendung eines expliziten Runge-Kutta Verfahrens bei beiden Problemen auf Näherungen $(u^i)_{i\leq N}$ und $(v^i)_{i\leq N}$ führt, welche

$$v^i = Qu^i \qquad (0 \leq i \leq N)$$

erfüllen. *3 Punkte*

Übung 2 Stabilitätsintervalle konkreter Einschrittverfahren

Geben Sie die Stabilitätsintervalle der folgenden Einschrittverfahren an:

$$\begin{aligned}
\text{a)}\quad y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}h\left(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)\right),\\
\text{b)}\quad y_{n+1} &= y_n + hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n)),\\
\text{c)}\quad y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}h\left(2f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 4f(t_n, y_n) + hf^{(1)}(t_n, y_n)\right), \quad f^{(1)} = f'_t + ff'_x.
\end{aligned}$$

3 Punkte

Übung 3 Imaginäres Stabilitätsintervall

Bestimmen Sie das rein imaginäre Stabilitätsintervall (der Schnitt der imaginären Achse mit dem Stabilitätsgebiet)

$$\{\ iz \in \mathbb{C} \quad | \quad z \in \mathbb{R},\ |z| \leq 1\ \}$$

für die Runge-Kutta Verfahren der Ordnung 1 bis 3. *2 Punkte*

Übung 4 Harmonischer Oszillator

Der Dynamik eines harmonischen Oszillators entspricht die AWA

$$u''(t) = -\omega u(t), \qquad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}.$$

1. Stellen Sie das äquivalente System erster Ordnung auf.
2. Zeigen Sie, das dieses Problem durch

   $$q'(t) = -\omega i q(t), \qquad q(t_0) = q_0 \in \mathbb{C},\ \omega \in \mathbb{R}$$

   auch als eine komplexwertige skalare AWA formuliert werden kann.
3. Überprüfen Sie, ob das explizite Euler Verfahren für dieses Problem absolut stabil ist, also die damit berechneten Näherungswerte y_n von $u(t_n)$ für eine Schrittweite $h > 0$ die Bedingung

   $$\sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| < \infty$$

   erfüllen.

3 Punkte

ÜBUNG 5 SIMULATION STEIFER SYSTEME

Die 3-dimensionale, steife AWA

$$u' = Au(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = (1, 0, -1)^T,$$

mit der Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -21 & 19 & -20 \\ 19 & -21 & 20 \\ 40 & -40 & -40 \end{pmatrix}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-40t}\left\{\cos(40t) + \sin(40t)\right\}, \\ u_2(t) &= \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-40t}\left\{\cos(40t) + \sin(40t)\right\}, \\ u_3(t) &= -e^{-40t}\left\{\cos(40t) - \sin(40t)\right\}. \end{aligned}$$

1. Implementieren Sie eine Modell-Klasse für dieses Problem (analog zu der Implementierung für Aufgabe 3 Blatt 3).

2. Bestimmen Sie (experimentell) die (konstante) Schrittweite, für welche das klassische Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung gerade noch stabil ist. Eine Implementierung der expliziten Runge-Kutta Verfahren der Ordnungen eins bis vier finden Sie unter den Beispielen der *HDNum* Bibliothek in der Datei *hdnum/examples/rungekutta.hh* (Der alternative Konstruktor erlaubt auch ganz allgemein die Übergabe eines beliebig großen Butcher-Tableaus).

3. Implementieren Sie für die implizite Trapezregel 2. Ordnung eine Löser-Klasse zur Anwendung auf *lineare* AWA. Verwenden Sie die in der *HDNum* Bibliothek bereit gestellten Methoden, um das auftretende LGS zu lösen (vergleiche Beispiel-Datei *hdnum/examples/lr.cc*).

4. Bestimmen Sie (experimentell) für das klassische Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung sowie die implizite Trapezregel 2. Ordnung die größte (konstante) Schrittweite, welche eine Berechnung von $u(2) \in \mathbb{R}$ auf 10 Stellen genau erlaubt. Vergleichen Sie die jeweils benötigte Rechenzeit.

6 Punkte