Numerik, Sommersemester 2010 — Aufgabenblatt 6
Prof. Peter Bastian — Abgabe 4. Juni 2010
IWR, Universität Heidelberg

ÜBUNG 1 SDIRK VERFAHREN

1. Bestimmen Sie für das Alexander Verfahren, welches durch das Butcher Tableau

$$\begin{array}{c|cc} \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & (1-\alpha) & \alpha \\ \hline & 1-\alpha & \alpha \end{array}$$

gegeben ist, die Stabilitätsfunktion $\omega(h\lambda)$ zum Modellproblem $u'(t) = \lambda u(t)$ (erfüllt $y_{n+1} = \omega(h\lambda)y_n$).

2. Zeigen Sie, dass es für $\alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ das Modellproblem in zweiter Ordnung approximiert. Führen Sie hierzu einen Koeffizientenvergleich von $\omega(z)$ und e^z durch.

3. Zeigen Sie, dass das Verfahren für $\alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ L-stabil ist.

4. Zeigen Sie, dass das Verfahren von Crouzieux mit dem Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

A-stabil (aber nicht L-stabil) ist und das Modelproblem in dritter Ordnung approximiert.

4 Punkte

ÜBUNG 2 B-STABILITÄT

Gegeben seien die beiden AWA

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)), \qquad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^d \\ v'(t) &= f(t, v(t)), \qquad v(t_0) = v_0 \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

wobei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine *einseitige Lipschitzbedingung* erfülle:

$$(f(t, u(t) - f(t, v(t)), u(t) - v(t)) \leq L\|u(t) - v(t)\|^2$$

Gemäß dem lokalen Stabilitätssatz gilt die Abschätzung

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{L(t-t_0)} \{\|u_0 - v_0\|\} .$$

Falls die Lipschitzkonstante $L \in \mathbb{R}$ von $f(t, \cdot)$ mit $L = 0$ gewählt werden kann (und $f(t, \cdot)$ damit einer Monotonie-Bedingung genügt), dann nennen wir die AWA *nicht expansiv*. Ein Runge-Kutta Verfahren heißt *B-stabil*, wenn es ein diskretes Analogon dieser Eigenschaft erbt, d.h. für die diskreten Approximationen $(u_i)_{i\geq 0}$ und $(v_i)_{i\geq 0}$ bei beliebigem $h > 0$ nach dem ersten Schritt die Bedingung

$$\|u_1 - v_1\| \leq \|u_0 - v_0\|$$

erfüllt ist.

1. Zeigen Sie, dass B-stabile RK Verfahren auch A-stabil sind.

2. Man zeige, dass unter den Kollokationsverfahren die Gauss-Verfahren B-stabil sind.
(Hinweis: Beim Gauss-Verfahren sind die $(c_i)_{i\leq s}$ gerade die Stützpunkte aus der Gauss-Quadratur, welche Polynome bis zur Ordnung $2s - 1$ exakt integriert. Verwenden Sie diese Eigenschaft.)

3. Man zeige, dass die Gauss-Verfahren nicht L-stabil sein können.

5 Punkte

ÜBUNG 3 θ-SCHEMA

Das elementare θ Schema entspricht dem Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|c} \theta & \theta \\ \hline & 1 \end{array}.$$

1. Zeigen Sie, dass dieses Verfahren äquivalent ist zu einer Vorschrift

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \theta h, y_n + \theta(y_{n+1} - y_n)).$$

2. Für welche Werte von θ ist das Verfahren A-stabil. Für welche Werte ist es L-Stabil.

3 Punkte

ÜBUNG 4 STABILITÄT EINER LINEAREN AWA

Jede der in der Vorlesung betrachteten Einschrittmethoden nimmt angewendet auf ein lineares (autonomes) System $u'(t) = Au(t)$ mit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ die Form $y_n = g(hA)y_{n-1}$ an, mit einer rationalen Funktion $g(\cdot)$.

1. Für den Fall, dass die Matrix symmetrisch ist, zeige man bzgl. der euklidischen Norm die Abschätzung

$$\|y_n\| \leq \max_{1\leq i\leq d} |g(h\lambda_i)|^n \|y_0\|$$

mit den Eigenwerten λ_i von A. (Hinweis: Reell-symmetrische Matrizen besitzen ein Orthogonalsystem aus Eigenvektoren.)

2. Bei örtlicher Diskretisierung der (1-dimensionalen) Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t v(x,t) = \partial_{xx} v(x,t), \quad v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad v(x,0) = v_0(x)$$

mittels der zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung entsteht ein System von $d = \frac{1}{\Delta x} - 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen in den Unbekannten $u_i(t) \approx v(x_i,t)$:

$$u_i'(t) = \frac{1}{\Delta x^2}\left[u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)\right], \quad i = 1,\dots,d \ (u_0 = u_{d+1} = 0).$$

Die zugehörige Koeffizientenmatrix

$$A = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_j = -\left(\frac{\sin(j\pi\Delta x/2)}{\Delta x/2}\right)^2, \quad j = 1\dots d.$$

Man bestimme die maximale Schrittweite h_{max} für welche das explizite Euler Verfahren das System noch stabil integriert.

3 Punkte