Numerik, Sommersemester 2010 | Aufgabenblatt 7
Prof. Peter Bastian | Abgabe 11. Juni 2010
IWR, Universität Heidelberg

Übung 1 DIRK Verfahren (Praktisch - Abgabe in zwei Wochen)

Zur Lösung der folgenden Aufgaben darf die generische Klasse `DIRK` verwendet werden, welche in der *HDNum* Bibliothek in der Datei *hdnum/src/ode.hh* implementiert ist. Eine Beispielanwendung auf den Van-der-Pol Oszillator ist in *hdnum/examples/vanderpol.cc* gegeben.

1. Implementieren Sie eine Modell-Klasse für die harmonische Schwingungsgleichung

$$u''(t) = -\omega^2 u(t)$$

bzw. dem zugehörigen System erster Ordnung. Verwenden Sie $\omega = 2\pi$ und führen Sie Simulationen des Systems im Intervall $t = [0, 10]$ für das Alexander Verfahren und die implizite Mittelpunktsregel durch. Verifizieren Sie in beiden Fällen die Konvergenz zweiter Ordnung und vergleichen Sie die relative Leistung der beiden Verfahren.

2. Lösen Sie die lineare AWA von Blatt 5 im Intervall $t = [0, 0.8]$ unter Verwendung der impliziten Mittelpunktsregel und des Alexander Verfahrens. Bestimmen Sie in beiden Fällen die maximale Schrittweite, welche es erlaubt die Lösung $u(0.8)$ in jeder Komponente auf 5 signifikante Stellen genau zu bestimmen. Wie viele Funktionsauswertungen $f(t, \cdot)$ werden jeweils benötigt.

3. Der Van-der-Pol Oszillator ist ein klassisches Beispiel für steife AWA. In den Koordinaten von Liénhart:

$$\begin{array}{rcl} y_1'(t) = & y_2(t) & y_1(0) = 1 \\ y_2'(t) = & \frac{1}{\epsilon}(y_1(t) - y_2(t)^3/3 + y_2(t)) & y_2(0) = 2. \end{array}$$

Für $\epsilon = 10^{-3}$ zeigt er ein periodisches Verhalten mit äußerst scharfen Umkehrpunkten. Berechnen Sie $y_1(10)$ und $y_2(10)$ mit der impliziten Mittelpunktsregel und dem (expliziten) Verfahren von Heun auf 7 signifikante Stellen genau. Vergleichen Sie den numerischen Aufwand (Rechenzeit) der beiden Rechnungen.

4. In einer weiteren Rechnung soll der Implizite Euler für den Van-der-Pol Oszillator an der "Stabilitätsgrenze" betrieben werden. Das bedeutet, dass der Zeitschritt so groß gewählt wird, dass das zugrunde liegende Newton Verfahren gerade eben noch konvergiert. Da der DIRK Löser aus der *HDNum* Bibliothek die Zeitschritte automatisch reduziert, wenn keine Konvergenz eintritt, kann anfangs $h = 1$ gewählt werden.

   Welche Informationen sind dieser Lösung überhaupt noch zu entnehmen? Verwenden Sie das adaptive Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren, welches in der Löser-Klasse *RKF45* implementiert ist, um den Vergleich mit einem expliziten Verfahren herzustellen. Wählen Sie zunächst TOL möglichst groß, so dass die Fehlerschätzung das Vefahren an der Stabilitätsgrenze betreibt. Vergleichen Sie die Ergebnisse der expliziten und impliziten Rechnung. Was passiert wenn Sie TOL langsam verringern?

6 Punkte

Übung 2 LMM Formen

Die Lösung $u(t)$ einer AWA erfülle

$$u(t_n) = u(t_{n-\sigma}) + \int_{t_{n-\sigma}}^{t_n} f(s, u(s))ds.$$

Beweisen Sie unter Verwendung des Interpolationspolynoms

$$p_m(t) = \sum_{\mu=0}^{m} f(t_{k-\mu}, u(t_{k-\mu}))L_{\mu,m}(t) \;\text{ mit }\; L_{\mu,m}(t) = \prod_{l=0, l\neq\mu}^{m} \frac{t - t_{k-l}}{t_{k-\mu} - t_{k-l}}$$

die Beziehung

$$u(t_n) = u(t_{n-\sigma}) + \sum_{\mu=0}^{m} f(t_{k-\mu}, u(t_{k-\mu})) \int_{t_{n-\sigma}}^{t_n} L_{\mu,m}(s)ds + \mathcal{O}(h^{m+2}),$$

welche die Grundlage der Adams-Formeln beschreibt, sowie die Beziehung

$$\sum_{\mu=0}^{m} L'_{\mu,m}(t_n)u(t_{k-\mu}) = f(t_n, u(t_n)) + \mathcal{O}(h^m),$$

welche die Rückwärtsdifferenzenformeln begründet. *3 Punkte*

Übung 3 LMM Formen

Man bestimme die größte erzielbare Ordnung für eine LMM der Form

$$y_n + \alpha(y_{n-1} - y_{n-2}) - y_{n-3} = \frac{3+\alpha}{2} h(f_{n-1} + f_{n-2}).$$

Für welche α ist diese Form nullstabil? *3 Punkte*

Übung 4 BDF Konvergenz

Man zeige, dass die Rückwärtsdifferenzenverfahren

$$\sum_{r=0}^{R} \alpha_{R-r} y_{n-r} = h\beta_R f_n$$

der Stufen $R = 1, 2, 3$ konvergent sind. Welche A-stabilen Einschrittformeln wären (für $R \geq 2$) jeweils als Startprozeduren geeignet.

4 Punkte