ÜBUNG 1 BDF 2

Die Koeffizienten der impliziten Rückwärtsdifferenzenformeln

$$\sum_{\mu=0}^{m} L'_{\mu,m}(t_n) y_{n-\mu} = f_n$$

ergeben sich direkt aus den Ableitungen der Lagrange-Polynome

$$L_{\mu,m}(t) = \prod_{l=0, l\neq\mu}^{m} \frac{t - t_{n-l}}{t_{n-\mu} - t_{n-l}}$$

zu den Stützstellen $t_n, \ldots, t_{n-m}$. Geben Sie im Fall $m = 2$ die Koeffizienten in Abhängigkeit der beliebigen Schrittweiten h_n, h_{n-1} an.

4 Punkte

ÜBUNG 2 LMM STABILITÄTSINTERVALLE

Man bestimme die Stabilitätsintervalle (und -gebiete) der folgenden beiden expliziten Mehrschrittformeln:

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-2} &= 2hf_{n-1} \\ y_n - y_{n-2} &= \frac{1}{2}h(f_{n-1} + 3f_{n-2}). \end{aligned}$$

Bemerkung: Es genügt die Untersuchung der Stabilität in der Umgebung des Ursprungs, d.h. für kleine h.

4 Punkte

ÜBUNG 3 LMM NACH SKEEL

Gegeben sei das lineare Mehrschrittverfahren

$$\alpha_k y_{j+k} + \cdots + \alpha_0 y_j = h\beta_k f_{j+k} + \cdots + h\beta_0 f_j$$

mit $f_l = f(t_l, y_l)$. Zeige, dass zur rekursiven Auswertung des Mehrschrittverfahrens die Speicherung des Vektors $s_j = (s_j^0, \ldots, s_j^{k-1})^T$ genügt, welcher rekursiv wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} s_j^k &= s_{j-1}^{k-1} + \alpha_k y_{j+k} - h\beta_k f_{j+k} = 0, \\ s_j^{k-1} &= s_{j-1}^{k-2} + \alpha_{k-1} y_{j+k} - h\beta_{k-1} f_{j+k}, \\ &\vdots \\ s_j^1 &= s_{j-1}^0 + \alpha_1 y_{j+k} - h\beta_1 f_{j+k}, \\ s_j^0 &= \alpha_0 y_{j+k} - h\beta_0 f_{j+k} \end{aligned}$$

4 Punkte

Man zeige durch Nachrechnen für ein Paar von einer expliziten und einer impliziten LMM:

$$\sum_{r=0}^{R} \alpha_{R-r}^{(P)} y_{n-r} = h \sum_{r=1}^{R} \beta_{R-r}^{(P)} f_{n-r}, \quad \sum_{r=0}^{R} \alpha_{R-r}^{(K)} y_{n-r} = h \sum_{r=0}^{R} \beta_{R-r}^{(K)} f_{n-r}.$$

1. Die Ordnung m der zugehörigen Prädikator-Korrektor Verfahrens in der P$(EC)^k$E-Form ist $m = \min(m^{(C)}, m^{(P)} + k)$.
2. Gilt für die Ordnungen $m^{(C)} < m^{(P)} + k$, so ist die Fehlerkonstante C_{m+1}^{*} des Gesamtverfahrens gleich der Fehlerkonstante $C_{m+1}^{(C)}$ des Korrektors.

4 Punkte