Übung 1 Lösbarkeit von RWA

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\ddot{y}(t) = -y(t), \quad y(0) = a, \quad y(T) = b, \quad y(t) \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von T besitzt dieses Problem keine eindeutige Lösung? Welche Beziehung müssen a und b in diesen Fällen erfüllen, damit es überhaupt eine Lösung gibt?

2 Punkte

Übung 2 Linear inhomogene RWA

Gegeben sei die linear inhomogene RWA

$$\begin{aligned} u'(t) - A(t)u(t) &= f(t), \quad t \in I := [a,b], \\ B_a u(a) + B_b u(b) &= g \end{aligned}$$

mit den Matrixen $B_a, B_b \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ und einem Vektor $g \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\tilde{u}(t;s) = y_o(t) + \sum_{i=1}^{d} s_i y_i(t) = y_0(t) + Y(t)s$$

mit den Lösungen der $d+1$ linearen AWA

$$\begin{aligned} y_0'(t) - A(t)y_0(t) &= f(t), \quad t \geq a, \quad y_0(a) = 0, \\ y_i(t) - A(t)y_i(t) &= 0, \qquad t \geq a, \quad y_i(a) = e_i, \quad i = 1,\dots,d \end{aligned}$$

eine Lösung der RWA ist, wenn $s \in \mathbb{R}^d$ die Gleichung

$$(B_a + B_b Y(b))\, s = g - B_b y_0(b)$$

erfüllt. *(Bemerkung: Es gilt sogar, dass die RWA genau dann eine eindeutige Lösung hat, wenn die Matrix $B_a + B_b Y(b)$ regulär ist.)*

4 Punkte

Übung 3 Sturm Liouville

Die regulären Sturm-Liouville Probleme genügen der Darstellung

$$\begin{aligned} -(pu')'(t) + q(t)u'(t) + r(t)u(t) = f(t), \qquad t \in I = [a,b] \\ \alpha_1 u'(a) + \alpha_0 u(a) = g_a, \quad \beta_1 u'(b) + \beta_0 u(b) = g_b \end{aligned}$$

Dabei seien $p \in C^1(I), q, r, f \in C(I)$ nicht singulär und beschränkt. Des weiteren seien $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, g_a, g_b$ reelle Konstanten.

- Formulieren Sie das RWA als System erster Ordnung.
- Für Dirichlet-Randbedingungen
  $$u(a) = g_a, \quad u(b) = g_b$$
  soll die Lösbarkeit des Problems untersucht werden. Zeigen Sie unter Verwendung der Ergebnisse von (und insbesondere der Bemerkung zu) Aufgabe 2, dass es hierzu aureichend ist zu zeigen, dass das homogene Problem mit $f(t) = 0, g_a = g_b = 0$ nur die triviale Lösung $u(t) = 0$ besitzt.

- Zeigen Sie, dass unter den Bedingungen

$$p(t) \geq \rho > 0, \quad \rho + (b-a)^2 \min_{t \in I} \{r(t) - \frac{1}{2} q'(t)\} > 0$$

für ein $\rho \in \mathbb{R}$, das Sturm-Liouville Problem mit Dirichlet-Bedingungen eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: Multiplizieren Sie die Differentialgleichung des homogenen Falls mit $u(t)$ und integrieren Sie selbige über das Intervall I. Verwenden Sie gegebenenfalls die Poincarésche Ungleichung

$$\int_I u^2 dt \leq (b-a)^2 \int_I (u')^2 dt.$$

4 Punkte

ÜBUNG 4 SINGLE SHOOTING

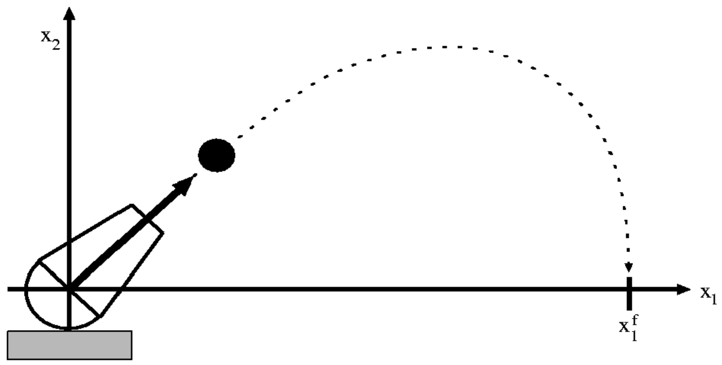
Ein Kanonier möchte mit seiner Kanone einen bestimmten Punkt in der Entfernung x_1^f treffen. Hierfür möchte er mit Hilfe der Methode des *Single Shooting* einen passenden Winkel finden, mit dem er die Kanone abschießen soll. Das Geschoß folgt dabei unter Vernachlässigung der Luftreibung der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = -\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

mit den Randbedingungen

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\dot{x}(0)\| = v_0, \quad x(T) = \begin{pmatrix} x_1^f \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Bezeichnungen entsprechen folgender Abbildung:



Berechne die korrekte Stellung der Kanone $\frac{\dot{x}_2(0)}{\dot{x}_1(0)}$. Falls es analytisch zu kompliziert wird, darf man auch das 1D-Newtonverfahren anwenden und den numerisch ermittelten Zahlenwert angeben. Für die Modellkonstanten sind die folgenden Zahlenwerte zu wählen:

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}, \quad v_0 = 500 \frac{m}{s}, \quad x_1^f = 1000m.$$

4 Punkte