Die obige explizite 2-Schrittformel ist nicht null-stabil, denn ihr erstes charakteristisches Polynom

$$\rho(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda - 5$$

hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_2 = -5\,.$$

Dies erklärt ihre offensichtliche Divergenz für $h \to 0$.

Wir betrachten nun das gestörte Mehrschrittverfahren

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n &= y_n + \rho_n\,, \qquad n = 0, \dots, R-1\,, \\ \sum_{r=0}^{R} \alpha_{R-r}\,\tilde{y}_{n-r} &= h \sum_{r=0}^{R} \beta_{R-r}\, f(t_{n-r}, \tilde{y}_{n-r}) + \rho_n\,, \quad n \geq R. \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Sei L wieder die globale Lipschitz-Konstante der Funktion $f\,(t,x)$. Unter der Bedingung $h < 1/(L|\beta_R|)$ (im Falle $\beta_R \neq 0$) sind die Werte $\tilde{y}_n$, $n \geq 0$, durch (5.2.8) eindeutig bestimmt (Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes).

Satz 5.1 (Stabilitätssatz): *Die AWA genüge der globalen Lipschitz-Bedingung, und die LMM sei null-stabil. Dann gilt unter der Voraussetzung $h < 1/(L|\beta_R|)$ (im Falle $\beta_R \neq 0$) für je zwei Lösungen $\{y_n\}$ und $\{\tilde{y}_n\}$ von (5.1.1) bzw. (5.2.8) die Abschätzung*

$$\|\tilde{y}_n - y_n\| \leq K\, e^{\Gamma(t_n - t_0)} \Big\{ \max_{0 \leq \nu \leq R-1} \|\rho_\nu\| + \sum_{\nu=R}^{n} \|\rho_\nu\| \Big\}, \quad n \geq R. \tag{5.2.9}$$

Die Konstanten K und Γ sind bestimmt durch die Lipschitz-Konstante L und die Koeffizienten α_r, β_r; für $h\,L|\beta_R| \to 1$ gehen $K, \Gamma \to \infty$.

Beweis: Wir führen den Beweis nur für den skalaren Fall $(d = 1)$. Die Differenzen $e_n = \tilde{y}_n - y_n$ genügen den Beziehungen $e_n = \rho_n$, für $n = 0, \dots, R-1$, und für $n \geq R$:

$$\begin{aligned} e_n = &- \sum_{r=1}^{R} \alpha_{R-r}\, e_{n-r} + h\beta_R \{f(t_n, \tilde{y}_n) - f(t_n, y_n)\} + \\ &\underbrace{+\, h \sum_{r=1}^{R} \beta_{R-r} \{f(t_{n-r}, \tilde{y}_{n-r}) - f(t_{n-r}, y_{n-r})\} + \rho_n}_{=:\ b_n} \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\sigma_n := \begin{cases} \dfrac{f(t_n, \tilde{y}_n) - f(t_n, y_n)}{e_n}\,, & e_n \neq 0\,, \\ 0\,, & e_n = 0\,. \end{cases}$$

Damit gilt dann $|\sigma_n| \leq L$ und

$$(1 - h\beta_R \sigma_n)\, e_n = - \sum_{r=1}^{R} \alpha_{R-r}\, e_{n-r} + b_n\,.$$

Diese Beziehung ergibt zusammen mit den trivialen Gleichungen

$$(1 - h\beta_R\sigma_{n-r})\, e_{n-r} = (1 - h\beta_R\sigma_{n-r})\, e_{n-r}\,, \qquad r = 1, \dots, R-1\,.$$

eine rekursive Folge von Gleichungssystemen

$$D_n E_n = C_n\, A\, E_{n-1} + B_{n+1}\,, \qquad n \geq 1\,,$$

für die R-Tupel

$$E_n = \overset{(e_{n-R+1}, \dots, e_n)^T}{(\cancel{e_n, \dots, e_{n-R+1}})^T} \in \mathbb{R}^R\,.$$

Dabei ist $B_n = (0, \dots, 0, b_{n+R})^T \in \mathbb{R}^R$, und die $R \times R$-Matrizen D_n, C_n und A sind gegeben durch:

$$D_n = \begin{bmatrix} 1 - h\beta_R\sigma_{n-R+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 - h\beta_R\sigma_{n+1} \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} 1 - h\beta_R\sigma_{n-R+1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 - h\beta_R\sigma_{n-R+1} & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & & & -\alpha_{R-1} \end{bmatrix}.$$

Aufgrund der Voraussetzung $h < 1/L|\beta_R|$ sind die Matrizen D_n invertierbar, und es gilt folglich

$$E_n = D_n^{-1}\{C_n\, A\, E_{n-1} + B_{n-1}\}\,, \qquad n \geq R$$

Die Matrix A hat das charakteristische Polynom (Entwicklung nach der letzten Zeile)

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^R\,(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_{R-1}\lambda^{R-1} + \lambda^R) = (-1)^R\rho(\lambda)\,.$$

Aufgrund der vorausgesetzten Null-Stabilität der LMM gibt es nun gemäß Hilfssatz 5.5 (s. unten) eine natürliche Matrizennorm $\|\cdot\|_0$, so dass

$$\|A\|_0 = \mathrm{spr}(A) \leq 1\,.$$

Die erzeugende Vektornorm sei gleichfalls mit $\|\cdot\|_0$ bezeichnet. Damit erhalten wir die Normabschätzung

$$\|E_n\|_0 \leq \|D_n^{-1}\|_0\,\{\|C_n\|_0\|E_{n-1}\|_0 + \|B_{n-1}\|_0\}\,.$$

Wegen der Äquivalenz aller Normen auf dem $\mathbb{R}^R$ gilt mit einer Konstante $\gamma > 0$

$$\gamma^{-1}\,\|z\|_0 \leq \sum_{\nu=1}^{R} |z_\nu| \leq \gamma\,\|z\|_0 \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}^R\,.$$

Damit wird nun abgeschätzt:

$$
\begin{aligned}
|b_{n}| &\le h\beta\, L \sum_{r=1}^{R} |e_{n-r}| + |\rho_{n}| \\
&\le h\beta\, L\, \gamma \|E_n\|_0 + |\rho_{n}|
\end{aligned}
$$

mit $\beta := \max_{r=0,\dots,R-1} |\beta_r|$, und folglich:

$$
\|B_n\|_0 \le \gamma |b_{n}| \le h\beta\, L\gamma^2 \|E_n\|_0 + \gamma|\rho_{n}|\,.
$$

Weiter gilt aufgrund der Identität

$$
\frac{1}{1-a} = 1 + \frac{a}{1-a}, \qquad |a| < 1\,,
$$

die Darstellung

$$
D_n^{-1} = I + \sum_n, \qquad \sum_n = \mathrm{diag}_{r=1,\dots,R}\Big(\frac{h\beta_R\,\sigma_{n-r}}{1-h\beta_R\sigma_{n-r}}\Big)\,.
$$

Es ist also

$$
\begin{aligned}
\|D_n^{-1}\|_0 &\le 1 + \|\sum_n\|_0 \le 1 + \gamma^2 \max_{r=1,\dots,R}\Big\{\Big|\frac{h\beta_R\sigma_{n-r}}{1-h\beta_R\sigma_{n-r}}\Big|\Big\} \\
&\le 1 + h\,\frac{\gamma^2\,|\beta_R|L}{1-h|\beta_R|L}\,.
\end{aligned}
$$

Auf analoge Weise erhalten wir

$$
\|C_n\|_0 \le 1 + h|\beta_R|L\,\gamma^2\,.
$$

Kombination aller dieser Abschätzungen ergibt nun

$$
\begin{aligned}
\|E_n\|_0 &\le \Big(1 + h\,\frac{\gamma^2|\beta_R|L}{1-h|\beta_R|L}\Big)\big\{(1 + h|\beta_R|L\,\gamma^2)\,\|E_{n-1}\|_0 + \\
&\quad + h\,\beta\,L\,\gamma^2\,\|E_{n-1}\|_0 + \gamma|\rho_n|\,\big\} \\
&\le \|E_{n-1}\|_0 + h\,\Gamma\,\|E_{n-1}\|_0 + \Lambda\,|\rho_n|
\end{aligned}
$$

mit den Konstanten

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{\gamma^2|\beta_R|L}{1-h|\beta_R|L}\,(1 + h\gamma^2\,|\beta_R|L) + \gamma^2\,L\,(|\beta_R| + \beta)\,, \\
\Lambda &= \gamma\,\Big(1 + h\,\frac{\gamma^2|\beta_R|L}{1-h|\beta_R|L}\Big).
\end{aligned}
$$

Durch rekursive Anwendung dieser Ungleichung für $n, n-1, \dots, 0$ erhalten wir

$$
\|E_n\|_0 \le \Gamma \sum_{\nu=0}^{n-1} h\,\|E_\nu\|_0 + \|E_0\|_0 + \Lambda \sum_{\nu=1}^{n} |\rho_\nu|\,.
$$