

ÜBUNG 1 LÖSUNGEN EINER LINEARER RANDWERTAUFGABE

Die lineare Randwertaufgabe $u''(t) + u(t) = 1$ zweiter Ordnung hat die allgemeine Lösung

$$u(t) = a \sin(t) + b \cos(t) + 1.$$

Verifizieren Sie, dass zu den Randbedingungen

1. $u(0) = u(\pi/2) = 0$ genau eine,
2. $u(0) = u(\pi) = 0$ keine,
3. $u(0) = u(\pi) = 1$ unendlich viele Lösungen dieser Gestalt existieren.

Dies demonstriert die Schwierigkeit einer einheitlichen Existenztheorie für Randwertaufgaben selbst im linearen Fall

4 Punkte

ÜBUNG 2 SCHIESSVERFAHREN

Die Randwertaufgabe

$$u''(t) = 100u(t), \quad 0 \leq t \leq 3, \quad u(0) = 1, \quad u(3) = e^{-30},$$

soll mit dem einfachen Schießverfahren gelöst werden. Dazu berechnet man die Lösung $u(t, s)$ der Anfangswertaufgabe

$$u''(t) = 100u(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = s,$$

und bestimmt $s = s^*$ so, dass $u(3, s^*) = e^{-30}$ wird.

Wie groß ist der relative Fehler in $u(3, s^*)$ wenn s^* mit einem relativen Fehler ϵ behaftet ist?

Hinweise:

- Formen Sie die RWA in ein System erster Ordnung um und bestimmen Sie dessen allgemeine Lösung durch Berechnen der Eigenwerte und Eigenvektoren der 2×2 Koeffizientenmatrix.
- Lesen Sie die Seiten 193 und 194 im Rannacher Skriptum Numerik 1 zum Schießverfahren für lineare Randwertaufgaben.

6 Punkte

ÜBUNG 3 SCHIESSVERFAHREN (PRAKTISCHE AUFGABE)

Die skalare Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u''(t) - 4u'(t) + \sin(t) * u(t) &= \cos(t), \quad 0 \leq t \leq \pi \\ u(0) &= u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi), \end{aligned}$$

soll mit Hilfe des einfachen Schießverfahren gelöst werden.

1. • Als Vorlage können die Dateien *uebung10.cc*, *model10.hh* und *shooting.hh* verwendet werden. Machen Sie sich mit der Struktur des Programmes vertraut und kompilieren Sie es. (Die Bezeichnungen orientieren sich dabei am Rannacher-Skript.)

- Formen Sie die Randwertaufgabe in ein System erster Ordnung der Form

$$v'(t) = A(t)v(t) + g(t)$$

um, und ergänzen sie *model10.hh* und *uebung10.cc* entsprechend. Danach sollte das Programm ohne Fehlermeldung durchlaufen, allerdings falsche Werte liefern.

- Ergänzen Sie *shooting.hh*. Plotten Sie die Lösung von $u(t)$.
2. Schreiben Sie das Programm wahlweise komplett selbst. Dafür gibt es zusätzlich 4 Bonuspunkte.

6+4 Punkte